Prof. Dr. Gerd Schön, Dr. Michael Marthaler, Dr. Jens Michelsen **18.01.12**

http://www.tfp.kit.edu/studium-lehre_415.php

Übungsblatt Nr. 10 zur Vorlesung Quantenmechanik II

32 Eigenschaften der Dirac-Matrizen

a) Zeigen Sie, dass die Dirac-Matrizen in der Standarddarstellung

$$\alpha^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \beta = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \tag{1}$$

folgende Eigenschaften besitzen

$$(\alpha^i)^\dagger = \alpha^i, \quad \beta^\dagger = \beta, \quad \alpha^i\alpha^j + \alpha^j\alpha^i = 2\delta^{ij}\mathbb{1}, \quad \alpha^i\beta + \beta\alpha^i = 0, \quad (\alpha^i)^2 = \beta^2 = \mathbb{1}. \tag{2}$$

b) Zeigen Sie, dass die γ-Matrizen der kovarianten Form der Dirac-Gleichung in der Standarddarstellung (erhalten aus Gl. (1) durch $\gamma^0 = \beta$ und $\gamma^i = \beta\alpha^i$) folgende Eigenschaften besitzen

$$(\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \quad (\gamma^i)^\dagger = -\gamma^i, \quad (\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0, \quad (\gamma^0)^2 = -(\gamma^i)^2 = \mathbb{1}, \quad \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}. \tag{3}$$

Zeigen Sie auch, dass die Chiralitäts-Matrix $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$ mit den anderen γ-Matrizen anti-kommutiert und mit den α-Matrizen kommutiert, d.h. $\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = [\gamma^5, \alpha^i] = 0$. Zeigen Sie weiter, dass

$$\sigma_{\mu\nu} = -\sigma_{\nu\mu} = \begin{cases} 0, & \mu = \nu \\ -i\alpha^i, & \mu = 0, \nu = i \\ \epsilon_{ijk}\Sigma^k, & \mu = i, \nu = j \end{cases} \quad \text{wobei} \quad \sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \quad \text{und} \quad \Sigma^i = \begin{pmatrix} \sigma^i & 0 \\ 0 & \sigma^i \end{pmatrix}. \tag{4}$$

33 Drehimpulserhaltung in der Dirac-Gleichung.

Berechnen Sie die Kommutatoren $[H, \boldsymbol{L}]$ und $[H, \boldsymbol{S}]$ wobei

$$H = c\boldsymbol{\alpha} \cdot (-i\hbar\boldsymbol{\nabla}) + mc^2\beta, \qquad \boldsymbol{L} = \boldsymbol{x} \times (-i\hbar\boldsymbol{\nabla}), \qquad \boldsymbol{S} = \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{\Sigma}, \tag{5}$$

mit den Dirac-Matrizen $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ und $\boldsymbol{\Sigma} = (\Sigma^1, \Sigma^2, \Sigma^3)$ mit Σ^i wie in Gl. (4). Zeigen Sie auch, dass $[H, \boldsymbol{J}] = 0$, wobei $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}$ den gesamten Drehimpuls darstellt.

34 Dirac-Gleichung im homogenen Magnetfeld.

Ein Elektron mit der Ruhemasse m bewege sich in einem homogenen Magnetfeld $\boldsymbol{B} = (0, 0, B)$. Dieses Magnetfeld kann durch das Vektorpotential $\boldsymbol{A} = (0, Bx, 0)$ beschrieben werden.

a) Schreiben Sie den vierkomponentigen Spinor Ψ in der Dirac-Gleichung in der Form $\Psi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}$ und leiten Sie aus der zeitunabhängigen Dirac-Gleichung für ein Elektron im Magnetfeld $\boldsymbol{B}$ eine Eigenwertgleichung für den zweikomponentigen Spinor ϕ_1 her, indem Sie den Spinor ϕ_2 exakt eliminieren.

b) Lösen Sie die so erhaltene Eigenwertgleichung mit Hilfe des Ansatzes

$$\phi_1(x, y, z) = \chi_1(x)e^{i(k_y y + k_z z)}$$

und bestimmen Sie die Energieeigenwerte.

[**Hinweis:** Das Eigenwertproblem lässt sich auf die Schrödingergleichung für einen verschobenen harmonischen Oszillator zurückführen, deren Lösung Sie als bekannt voraussetzen können.]

c) Welche Energieeigenwerte erhält man im nichtrelativistischen Grenzfall?