

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila

WS 12/13 – Blatt 02

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~luminita/TheoE1213>

Abgabe: 26.10.2012

Besprechung: 30.10.2012

(*) Aufgabe 1 (2P) : Teilchen mit Spin im Zentralpotential

Betrachten Sie ein Teilchen mit Spin, das sich in einem Zentralpotential $V(r)$ befindet. Der Hamiltonoperator sei gegeben durch

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) + A(r)\vec{L} \cdot \vec{S},$$

wobei m die Masse des Teilchens, $\vec{S}$ der Spin, $\vec{L}$ der Bahndrehimpuls und $A(r)$ eine bekannte Funktion seien. Berechnen Sie $[\vec{L}, H]$ und $[\vec{S}, H]$. Zeigen Sie, dass $[\vec{J}, H] = 0$, wobei $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$.

(*) Aufgabe 2 (5P): Unabhängige harmonische Oszillatoren

Seien $a_1^\dagger, a_1$ und $a_2^\dagger, a_2$ die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren zweier unabhängiger eindimensionaler harmonischer Oszillatoren mit den zugehörigen Vertauschungsrelationen. Alle Operatoren verschiedener Oszillatoren vertauschen, d.h. $[a_1, a_2^\dagger] = [a_2, a_1^\dagger] = [a_1, a_2] = [a_1^\dagger, a_2^\dagger] = 0$. Da somit auch $N_1 = a_1^\dagger a_1$ und $N_2 = a_2^\dagger a_2$ vertauschen, wird der Hilbertraum durch die gemeinsamen Eigenvektoren von N_1 und N_2 , $|n_1, n_2\rangle$, aufgespannt, wobei $N_1|n_1, n_2\rangle = n_1|n_1, n_2\rangle$ und $N_2|n_1, n_2\rangle = n_2|n_1, n_2\rangle$ gilt. Weiter seien

$$J_+ = \hbar a_1^\dagger a_2, \quad J_- = \hbar a_2^\dagger a_1, \quad J_z = \hbar(a_1^\dagger a_1 - a_2^\dagger a_2)/2 \quad \text{und} \quad \vec{J}^2 = J_z^2 + (J_+ J_- + J_- J_+)/2.$$

(a) Zeigen Sie, dass die so definierten Operatoren $J_\pm, J_z$ eine Drehimpulsalgebra erfüllen, nämlich

$$[J_z, J_\pm] = \pm \hbar J_\pm, \quad [J_z, \vec{J}^2] = 0 \quad \text{und} \quad [J_+, J_-] = 2\hbar J_z.$$

(b) Wie wirken J_+, J_-, J_z und $\vec{J}^2$ auf die Zustände $|n_1, n_2\rangle$? Geben Sie die Eigenwerte von J_z und $\vec{J}^2$ zu den Eigenzuständen $|n_1, n_2\rangle$ an.

(c) Drücken Sie die Drehimpulsquantenzahlen j und m durch n_1 und n_2 aus. Wie erhält man den Zustand $|j, m\rangle$ aus dem Vakuumzustand der beiden Oszillatoren $|n_1 = 0, n_2 = 0\rangle$?

Hinweis: j und m sind definiert durch $\vec{J}^2|j, m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j, m\rangle$, $J_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle$.

(*) Aufgabe 3 (3P): Matrixdarstellung des Spinsoperators $\vec{S}^2$

Betrachten Sie ein System aus zwei Spin 1/2-Teilchen. Der Zustandsraum eines solchen System ergibt sich aus dem Produktraum der einzelnen Spinräumen. Eine Orthonormalbasis dieses Raums lautet

$$\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle\} = \{|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle\},$$

wobei die Vektoren $|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle$ die Eigenvektoren der vier Observablen $\vec{S}_1^2, S_{1z}; \vec{S}_2^2, S_{2z}$ bezeichnen. Betrachten Sie nun den Gesamtspin des Systems $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

(a) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\{\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2, \vec{S}^2, S_z\}$ paarweise vertauschen.

(b) Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $\vec{S}^2$ in der Basis $\{|\varepsilon_1, \varepsilon_2\rangle\}$.

- (c) Finden Sie eine Basis, in der $\vec{S}^2$ diagonal ist und geben Sie die Eigenzustände und ihre Entartung an.

Aufgabe 4: Zwei-Spin System

Ein System bestehe aus zwei verschiedenen Teilchen mit jeweils Spin $S = 1/2$. Seien $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$ der relative Ortsvektor und $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ die Spinoperatoren.

- (a) Zeigen Sie, dass gilt

$$3 \frac{(\vec{S}_1 \cdot \vec{r})(\vec{S}_2 \cdot \vec{r})}{r^2} - \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2} \left(3 \frac{(\vec{S} \cdot \vec{r})^2}{r^2} - \vec{S}^2 \right),$$

wobei $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ der Gesamtspinoperator ist.

- (b) Der Hamiltonoperator eines solchen Systems sei gegeben durch

$$H_1 = a \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b (S_{1z} + S_{2z}).$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von H , wobei a und b Konstanten sind.

- (c) Welche Energieeigenwerte bekommen Sie für den Hamiltonoperator

$$H_2 = a \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + b (S_{1z} - S_{2z})?$$

Bestimmen Sie die Eigenvektoren.

- Das **Beratungstutorium** findet mittwochs 09:45 - 10:15 Uhr im Raum 10.1 (Geb. 30.23) statt.
-