

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~luminita/TheoE1213>

WS 12/13 – Blatt 03

Abgabe: 02.11.2012

Besprechung: 06.11.2012

(*) Aufgabe 1 (7P) : Clebsch-Gordan-Koeffizienten

(a) Betrachten Sie die Addition zweier Drehimpulse $j_1 = 1$ und $j_2 = 1$. Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die den Entwicklungskoeffizienten des Basiswechsels vom Tensorproduktraum $\{|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle\} \equiv \{|j_1, j_2; m_1, m_2\rangle\}$ in den Raum der Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses $\{|J, M\rangle\}$ entsprechen. Verwenden Sie dazu die Phasenkonvention $\langle j_1, j_2; j_1, J - j_1 | J, J \rangle > 0$.

(b) Leiten Sie für beliebige Drehimpulse j_1 und j_2 folgende Rekursionsformeln her. Ausgehend von $\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle = 1$ können Sie damit alle anderen Clebsch-Gordan-Koeffizienten berechnen.

$$\begin{aligned} a(J, M) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle &= a(j_1, m_1) \langle j_1, j_2; m_1 + 1, m_2 | J, M + 1 \rangle \\ &\quad + a(j_2, m_2) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 + 1 | J, M + 1 \rangle, \\ a(J, M - 1) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle &= a(j_1, m_1 - 1) \langle j_1, j_2; m_1 - 1, m_2 | J, M - 1 \rangle \\ &\quad + a(j_2, m_2 - 1) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 - 1 | J, M - 1 \rangle, \end{aligned}$$

wobei $a(p, q) = \sqrt{p(p+1) - q(q+1)}$. Kontrollieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus Aufgabenteil (a).

Hinweis: Fangen Sie mit dem Matrixelement

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J_{\pm} | J, M \rangle \quad \text{mit} \quad (J_{\pm} = J_{1\pm} + J_{2\pm})$$

an und wenden Sie den Operator $J_{\pm}$ einmal nach links und einmal nach rechts an.

Aufgabe 2: Reduzible Tensoren

$\vec{v}$ und $\vec{\omega}$ seien Vektoren, die sich unter Drehungen R folgendermaßen transformieren

$$v'_i = \sum_k R_{ik} v_k, \quad w'_i = \sum_k R_{ik} \omega_k.$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix $T_{ij} = v_i \omega_j$ geschrieben werden kann als

$$T_{ij} = \frac{1}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij} + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2} \left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij} \right), \quad (1)$$

wobei $\text{Tr}(M)$ die Spur einer Matrix M bezeichnet.

(b) Zeigen Sie, dass die drei Anteile auf der rechten Seite von Gl. (1) separat invariant unter Drehungen sind.

(*) Aufgabe 3 (3P): Spin-Singulett- und Triplett-Zustände

Betrachten Sie ein System von zwei Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen. Zeigen Sie, dass die Spin-Singulett- und Triplett-Zustände separat invariant unter Drehungen sind und somit eine irreduzible Zerlegung des Tensorprodukts $|\varepsilon_1\rangle \otimes |\varepsilon_2\rangle$ mit $|\varepsilon_i\rangle \in \{|+\rangle, |-\rangle\}$ darstellen.

Hinweis: Drehungen im zweidimensionalen Raum der Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen werden durch $R = e^{i\frac{\phi}{2}\hat{n}\cdot\vec{\sigma}}$ beschrieben, wobei $\hat{n}$ die Drehachse, ϕ den Drehwinkel und $\vec{\sigma}$ die Pauli Matrizen bezeichnen.

Aufgabe 4: Vektoroperatoren

Betrachten Sie ein spinloses Teilchen mit Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und einen Operator $\vec{A}$ dessen Komponenten folgenden Vertauschungsrelationen genügen

$$[L_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk}A_k, \quad (2)$$

wobei ϵ_{ijk} den Levi-Civita-Tensor bezeichnet.

(a) Benutzen Sie das (allgemeine) Wigner-Eckart-Theorem, um die Matrixelemente $\langle lm|A_q^{(1)}|l'm'\rangle$, mit $q = -1, 0, 1$, zu berechnen. Hierbei bezeichnet $\{|lm\rangle\}$ die Standardbasis von gemeinsamen Eigenzuständen zu $\vec{L}^2$ und L_z und die Komponenten $A_q^{(1)}$ sind folgendermassen definiert

$$A_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_x - iA_y), \quad A_0^{(1)} = A_z, \quad A_1^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(A_x + iA_y).$$

Leiten Sie die Auswahlregeln, die dieser Operator in der Basis $\{|lm\rangle\}$ erfüllt, her. (Mit anderen Worten: unter welchen Bedingungen verschwinden die Matrixelemente $\langle lm|A_q^{(1)}|l'm'\rangle$ nicht.)

(b) Betrachten Sie nun den Fall $\vec{A} = \vec{L}$. Berechnen Sie explizit die dazugehörige reduzierte Matrixelemente $\langle l||L^{(1)}||l'\rangle$.
