

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~luminita/TheoE1213>

WS 12/13 – Blatt 04

Abgabe: 09.11.2012

Besprechung: 13.11.2012

Aufgabe 1: Elektrisches Quadrupolmoment

Elektrische Quadrupolübergänge sind bestimmt durch die Matrixelemente des Quadrupoloperators

$$Q_{jk} = e \left(x_j x_k - \delta_{jk} \frac{1}{3} r^2 \right), \quad j, k = 1, 2, 3.$$

(a) Drücken Sie die Komponenten Q_{jk} durch einen irreduziblen Tensoroperator zweiter Stufe $Q_{\mu}^{(2)}$, mit $\mu = -2, \dots, 2$, aus.

Hinweis: Benutzen Sie dabei die Kugelflächenfunktionen Y_{lm} die irreduzible Tensoren l -ter Stufe sind.

(b) Berechnen Sie die Quadrupol-Matrixelemente $\langle klm | Q_{jk} | k'l'm' \rangle$ mit Hilfe des Wigner-Eckart-Theorems.

(c) Bestimmen Sie die Auswahlregeln für Quadrupolübergänge.

(*) Aufgabe 2 (2P): π -Nukleon-Streuung

π -Mesonen und Δ -Baryonen sind, wie das Proton (p) und Neutron (n), aus Quarks zusammengesetzt. Wichtige Quantenzahlen für deren Charakterisierung sind der Isospin $\vec{I}$ und die z-Komponente des Isospins I_z . Die starke Wechselwirkung ist invariant unter Isospin-Transformationen, d.h., $\vec{I}^2$ und I_z sind Erhaltungsgrößen. Die Zustände werden analog zur räumlichen Rotationssymmetrie durch Ket-Zustände $|I, I_z\rangle$ charakterisiert. Die Isospinoperatoren genügen den Drehimpulsvertauschungsrelationen $[I_i, I_j] = i\varepsilon_{ijk} I_k$.

Der Wirkungsquerschnitt für die π -Nukleon-Streuung $\sigma(\pi N \rightarrow \pi' N')$, mit $\pi, \pi' \in \{\pi^+, \pi^0, \pi^-\}$ und $N, N' \in \{p, n\}$ ist gemäß

$$\sigma \sim |\langle \pi' N' | T | \pi N \rangle|^2$$

durch das Matrixelement des skalaren Operators T bestimmt, der invariant unter Isospin-Transformationen ist. π^+, π^0 und π^- sind Isospin-Zustände zu $I = 1$ mit $I_z = 1, 0, -1$; p, n solche zu $I = 1/2$ und $I_z = 1/2, -1/2$. Falls die Schwerpunktenenergie im Bereich der Δ -Resonanz liegt, d.h. bei ca. 1236 MeV, kann das Matrixelement für die Reaktion $\pi N \rightarrow \pi' N'$ folgendermaßen faktorisiert werden:

$$\langle \pi' N' | T | \pi N \rangle \sim \langle \pi' N' | T | \Delta \rangle \langle \Delta | T | \pi N \rangle.$$

Der Isospin der Δ -Resonanz ist $I = 3/2$. Berechnen Sie die Verhältnisse der Wirkungsquerschnitte

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) : \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n).$$

Hinweis: Wenden Sie das Wigner-Eckart-Theorem an.

(*) Aufgabe 3 (5P): Landé -Faktoren

Betrachten Sie den Einfluss eines Magnetfeldes $\vec{B}$ auf die Energieniveaus eines Wasserstoffatoms. Der Hamilton-Operator, der die Wechselwirkung beschreibt, ist gegeben durch

$$H_Z = -\vec{\mu} \cdot \vec{B},$$

wobei der Operator des magnetischen Moments des Elektrons $\vec{\mu}$ lautet $\vec{\mu} = -\mu_B(g_L\vec{L} + g_S\vec{S})/\hbar$, mit $g_L = 1$ und $g_S = 2$. μ_B ist das Bohr-Magneton.

(a) Betrachten Sie den Fall, dass der Effekt des Magnetfeldes klein gegenüber der Feinstruktur ist. Zeigen Sie, dass das magnetische Moment in einem nL_J Zustand folgende Gestalt hat

$$\vec{\mu} = -g_J \mu_B \vec{J}/\hbar, \quad \text{mit} \quad g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)},$$

wobei $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$. g_J ist als Landé -Faktor bekannt. Dabei soll die Hyperfeinstruktur vernachlässigt werden.

(b) Berechnen Sie näherungsweise das Magnetfeld $\vec{B}$, für welches die von H_Z induzierten Effekten und die Feinstruktur-Aufspaltung zwischen den $2p_{1/2}$ - und $2p_{3/2}$ -Zuständen vergleichbare Größenordnung haben.

(c) Betrachten Sie nun auch den Effekt des Kernspins ($I = 1/2$). Der Gesamtdrehimpuls des Atoms ist $\vec{F} = \vec{J} + \vec{I}$.

1. Welche Werte haben die Quantenzahlen J und F für ein Wasserstoffatom auf dem $2p$ -Niveau?
2. Es sei $\{|F, M_F\rangle \equiv |n, F, M_F; l, s, J, I\rangle\}$ die Basis, die sich durch Addition von J und I zu F ergibt (M_F ist der Eigenwert von F_Z). Zeigen Sie, dass in jedem Unterraum $\mathcal{H}(n=2, F, l=1, s=1/2, J, I=1/2)$ des $2p$ -Niveaus der Operator des magnetischen Moments des Elektrons $\vec{\mu}$ folgendermaßen geschrieben werden kann

$$\vec{\mu} = -g_{JF} \mu_B \vec{F}/\hbar.$$

Berechnen Sie die verschiedenen möglichen Werte des Landé -Faktors g_{JF} des $2p$ -Niveaus.

(*) Aufgabe 4 (3P): Spin-3/2-Teilchen

Ein Spin-3/2-Teilchen sei in einem Zentralpotential $V(r)$ gebunden. Unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung lautet der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \xi(r)\vec{L} \cdot \vec{S}.$$

- (a) Betrachten Sie den $\vec{L} \cdot \vec{S}$ -Term nach Störungsrechnung erster Ordnung. In wieviele Niveaus spalten die Zustände zu $l = 0, 1, 2$ auf?
- (b) Berechnen Sie die relative Aufspaltung innerhalb der Multipletts zu festen l und skizzieren die Energieniveaus.

- Bitte beachten Sie die Verlängerung des Abgabetermins bis **Freitag 11:30 Uhr**.