

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~luminita/TheoE1213>

WS 12/13 – Blatt 05

Abgabe: 16.11.2012

Besprechung: 20.11.2012

(*) Aufgabe 1 (6P): Wasserstoffatom im Magnetfeld

Betrachten Sie ein Elektron in einem p -Zustand, welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ befindet, wobei der Hamilton-Operator die Gestalt

$$\begin{aligned}H &= H_0 + H_Z + H_{LS}, \\H_Z &= \omega_0(L_z + 2S_z), \\H_{LS} &= \lambda \vec{L} \cdot \vec{S},\end{aligned}$$

haben soll. Dabei ist H_0 der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms, H_Z beschreibt den Einfluss des Magnetfeldes und H_{LS} ist die Spin-Bahnkopplung. (Die Ortsabhängigkeit sowie die restlichen relativistischen Korrekturen sollen der Einfachheit halber vernachlässigt werden).

(a) Zeigen Sie, dass H aus dem Entartungsraum der p -Zustände von H_0 nicht herausführt, d. h. dass $[H, \vec{L}^2] = 0$.

(b) Betrachten Sie H_{LS} als Störung zu $H_0 + H_Z$ und geben Sie für das ungestörte Problem die Energieeigenwerte sowie deren Entartungen an.

(c) Berechnen Sie die Matrixelemente des Störoperators H_{LS} in der Basis $\{|l, s; m_l, m_s\rangle\}$. Dazu ist es günstig, die Operatoren $L_{\pm}$ und $S_{\pm}$ einzuführen.

(d) Betrachten Sie zunächst die nichtentarteten Zustände und bestimmen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung die neuen Energien und Eigenfunktionen.

(e) Untersuchen Sie jetzt störungstheoretisch den Einfluss des Spin-Bahnkopplung auf die entarteten Zustände. Berechnen Sie die Energien in erster Ordnung in λ und die neuen Eigenfunktionen in nullter Ordnung.

(*) Aufgabe 2 (4P): Positronium

Positronium ist ein Atom, das aus einem Elektron e^- und seinem Antiteilchen, dem Positron e^+ besteht. Betrachten Sie ein solches Atom im Grundzustand, welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B}$ parallel zur z -Achse befindet. Der Hamilton-Operator kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned}H &= H_0 + H_{HF} + H_z, \\H_{HF} &= A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \\H_Z &= -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}.\end{aligned}$$

Dabei bezeichnet H_0 den Hamilton-Operator des Positroniums, der nur die elektrostatische Wechselwirkung zwischen Elektron und Positron enthält. $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ sind die Spinoperatoren von Elektron bzw. Positron und $\vec{\mu}_1$ und $\vec{\mu}_2$ deren magnetische Momente. $\vec{S}_i$ und $\vec{\mu}_i$ sind durch die gyromagnetischen Verhältnisse γ_1 und γ_2 miteinander verknüpft:

$$\vec{\mu}_i = \gamma_i \vec{S}_i, \quad i = 1, 2.$$

Für das Elektron und das Positron gilt $\gamma_1 = -\gamma_2$. H_{HF} beschreibt die magnetische Wechselwirkung zwischen $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ und H_z die Kopplung von $\vec{B}$ an die magnetischen Momente.

(a) Berechnen Sie die Matrixelemente des Störoperators $H_{HF} + H_Z$ in der Basis $\{|F, m_F\rangle\}$, wobei F und m_F die Quantenzahlen des Gesamtspins

$$\vec{F} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

sind.

(b) Bestimmen Sie die Aufspaltung des $1S$ -Grundzustands in erster Ordnung Störungstheorie.

(c) Stellen Sie graphisch die Energieaufspaltung als Funktion des Magnetfelds B dar.

Aufgabe 3 : Eichinvarianz

Betrachten Sie den Hamilton-Operator eines geladenen Teilchens im Magnetfeld. Zeigen Sie, dass die Schrödinger-Gleichung invariant ist, falls folgende Transformationen gleichzeitig durchgeführt werden

$$\begin{aligned}\vec{A} \rightarrow \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda, \\ \Phi \rightarrow \Phi' &= \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda, \\ \Psi \rightarrow \Psi' &= \Psi e^{\frac{iQ}{\hbar}\Lambda},\end{aligned}$$

wobei $\vec{A}$ das Vektorpotential und Φ das skalare Potential ist. $\vec{A}$, Φ und Λ sind Funktionen von $\vec{r}$ und t . Q bezeichnet die elektrische Ladung des Teilchens.