

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila

<http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~luminita/TheoE1213>

WS 12/13 – Blatt 07

Abgabe: 30.11.2012

Besprechung: 04.12.2012

Aufgabe 1: Rechnen mit „natürlichen Einheiten“

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.

(a) Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?

Hinweis: $c = 299\,792\,458\text{ m/s}$ und $\hbar = 6,582\,119 \cdot 10^{-22}\text{ MeV s}$.

(b) Welcher Masse in Kilogramm entspricht 1 MeV?

Hinweis: $1\text{ eV} = 1,602\,176 \cdot 10^{-19}\text{ J}$.

(c) Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140\text{ MeV}$) in fm ($= 10^{-15}\text{ m}$) aus.

(*) Aufgabe 2 (6P): Klein-Gordon-Gleichung für Teilchen im elektromagnetischen Feld

(a) (i) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her.

Hinweis: Benutzen Sie dazu die Ergebnisse aus Aufgabe 3 von Übungsblatt 5.

(ii) Zeigen Sie, dass Ψ^* , wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist, ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt.

(b) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet.

(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4)u(\vec{r}) = [E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r}).$$

(ii) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2 + [(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

(iii) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

(*) Aufgabe 3 (4P): Gamma-Matrizen

(a) Die Gamma-Matrizen genügen der Dirac-Algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbb{1}.$$

Sie haben in der Dirac-Darstellung folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ_i , $i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen.
Berechnen Sie die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3, \quad (1)$$

in der Dirac-Darstellung.

(b) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}).$$

(c) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} \not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= 2A \cdot B, & \gamma^\nu \not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= 2A^\nu, \\ \gamma^\nu \not{A}\gamma_\nu &= -2\not{A}, & \gamma^\nu \not{A}\not{B}\gamma_\nu &= 4A \cdot B, \end{aligned}$$

wobei A und B Vierervektoren sind und die Notation $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$ verwendet wurde.

Hinweis: Für Aufgabenteil (b) und (c) soll keine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen verwendet werden.

Aufgabe 4: Gyromagnetischer Faktor des Protons

Um ein Proton zu beschreiben, muss die Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines magnetischen Feldes um den Term $(k_p e / 4m_p) \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \Psi$ erweitert werden. $F^{\mu\nu}$ ist der Feldstärketensor und $\sigma_{\mu\nu}$ wurde in Gleichung (1) definiert. Bestimmen Sie k_p so, dass der gemessene Wert des gyromagnetischen Faktors des Protons, $g_p = 5.58$ reproduziert wird.

Hinweis: Betrachten Sie dabei ein schwaches homogenes Magnetfeld $\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r}$.