Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
`http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/~luminita/TheoE1213`

WS 12/13 – Blatt 11
Abgabe: 18.01.2013
Besprechung: 22.01.2013

Aufgabe 1: β-Zerfall

Ein Tritiumkern (^{3}H) verwandle sich durch β-Zerfall in einem Heliumkern (^{3}He). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im $2s$-Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

(*) Aufgabe 2 (6P): Magnetische Resonanz.

Betrachten Sie ein Spin-1/2-Teilchen in einem Magnetfeld mit konstanter Komponente in z-Richtung und einer mit Frequenz ω in der xy-Ebene rotierenden Komponente. Der Hamilton-Operator für dieses System lautet:

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0 + V(t)\,, \\ H_0 &= \omega_0 S_z\,, \\ V(t) &= \omega_1 \cos(\omega t) S_x + \omega_1 \sin(\omega t) S_y\,, \end{aligned}$$

wobei S_i mit $i = x, y, z$ die Komponenten des Spin-Operators bezeichnet.

(a) Bestimmen Sie den Hamilton-Operator $H_I(t)$, der die Dynamik im Wechselwirkungsbild charakterisiert.

(b) Bestimmen Sie den zeitabhängigen Erwartungswert $\langle \vec{S} \rangle(t)$ für den Fall $\omega = \omega_0$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich das System im Grundzustand von H_0.

(c) Für die allgemeine Lösung der Schrödinger-Gleichung erweist es sich als vorteilhaft, eine andere Aufteilung des Hamilton-Operators zu wählen:

$$\begin{aligned} H(t) &= H_0' + V'(t)\,, \\ H_0' &= \omega S_z\,, \\ V'(t) &= (\omega_0 - \omega) S_z + V(t)\,. \end{aligned}$$

Im Wechselwirkungsbild lautet dann der Hamilton-Operator

$$V_I'(t) = e^{iH_0' t/\hbar} V'(t) e^{-iH_0' t/\hbar}\,.$$

Bestimmen Sie nun den Erwartungswert $\langle S_z \rangle(t)$ für beliebiges ω, wobei sich das System zum Zeitpunkt $t = 0$ wieder im Grundzustand von H_0 befindet.

(*) Aufgabe 3 (4P): Wasserstoffatom im elektrischen Feld

Betrachten Sie ein Wasserstoffatom in einem homogenen elektrischen Feld $\vec{E}(t)$, das entlang der z-Richtung liegt. Die Amplitude betrage $E(t) = A\tau/(\tau^2 + t^2)$, wobei A und τ vorgegebene Konstanten sind. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit P für den Übergang des Elektrons aus dem Grundzustand (bei $t \to -\infty$) in den $2p$-Zustand (bei $t \to +\infty$).

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}x\, \frac{e^{i\omega x}}{a^2 + x^2} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega| a}\,.$$

Die Anmeldung zu den Vorleistungen in QISPOS ist frei geschalten(PO2008 und PO2010). Sie können sich über das Studierendenportal anmelden.