Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. L. Mihaila
http://www-ttp.particle.uni-karlsruhe.de/∼luminita/TheoE1213

WS 12/13 – Blatt 12
Abgabe: 25.01.2013
Besprechung: 29.01.2013

(*) Aufgabe 1 (6P): Zweizustandssystem im äußeren Potential.

Ein Zweizustandssystem im zeitlich harmonischen äußeren Potential wird durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben

$$H \quad = \quad H_0 + V(t)\,,$$

wobei H_0 der ungestörte Hamilton-Operator bezeichnet:

$$H_0|1\rangle = E_1|1\rangle\,, \quad H_0|2\rangle = E_2|2\rangle\,, \quad \text{mit} \quad E_2 > E_1\,.$$

Der Störoperator im Raum der ungestörten Eigenzustände $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ ist gegeben durch

$$V(t) \quad = \quad \lambda \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}\,.$$

(a) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial|\Psi(t)\rangle/\partial t = H|\Psi(t)\rangle$ für die Anfangsbedingung $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$. Dabei erhalten Sie ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_n(t) = \langle n|\Psi(t)\rangle$, $n = 1,2$, das exakt gelöst werden kann.
(b) Benutzen Sie nun Störungstheorie in niederster, nicht-trivialer Ordnung, um die Koeffizienten $c_n(t)$, $n = 1,2$, zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung von Aufgabenteil (a) für kleine Werte von λ. Betrachten Sie dabei folgende Fälle separat:
(i) $\omega \approx \omega_{21}$ mit $\omega_{21} = (E_2 - E_1)\hbar$;
(ii) $\omega \gg \omega_{21}$ bzw. $\omega \ll \omega_{21}$.

Aufgabe 2: Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes

Der Hamilton-Operator des freien Strahlungsfeldes in einem endlichen Volumen V ist gegeben durch

$$\begin{aligned} H_{\rm rad} &= \frac{\varepsilon_0 c^2}{2}\int \mathrm{d}^3r \left(\frac{\vec{E}^{\,2}}{c^2} + \vec{B}^{\,2}\right) \\ &= \frac{V\varepsilon_0 c^2}{2}\sum_{\vec{k}} \left(\frac{1}{c^2}|\dot{\vec{A}}_{\vec{k}}(t)|^2 + |\vec{k}\times\vec{A}_{\vec{k}}(t)|^2\right)\,, \end{aligned} \qquad (1)$$

wobei $\vec{A}_{\vec{k}}(t)$ durch die Fourier-Reihe des Vektorpotentials $\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}} \vec{A}_{\vec{k}}(t)e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$ definiert sind. Zeigen Sie, dass Gl. (1) in folgender Form geschrieben werden kann

$$H_{\rm rad} \quad = \quad \sum_{\vec{k},\lambda} \hbar c k \left(\vec{a}^{\,\dagger}_{\vec{k},\lambda}\vec{a}_{\vec{k},\lambda} + \frac{1}{2}\right)\,,$$

wobei $\vec{k}$ den Wellenvektor und λ die Polarization bezeichnet. Das Vektorpotentials ist dabei gegen durch (mit $\omega_k = kc$)

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda}\sqrt{\frac{\hbar}{2kcV\varepsilon_0}}\left(a_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda}e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}\vec{\varepsilon}^{\,\star}_{\vec{k},\lambda}e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right)\,,$$

wobei $a_{\vec{k},\lambda}$ und $a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}$ die Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren sind. Es gilt

$$[a_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}\,',\lambda'}] = \delta_{\vec{k},\vec{k}\,'}\delta_{\lambda,\lambda'}\,, \quad [a_{\vec{k},\lambda}, a_{\vec{k}\,',\lambda'}] = 0\,, \quad \text{und} \quad [a^{\dagger}_{\vec{k},\lambda}, a^{\dagger}_{\vec{k}\,',\lambda'}] = 0\,.$$

Hinweis: O.B.d.A. kann man Polarisationsvektoren wählen, so dass gilt $\vec{\varepsilon}_{\vec{k},\lambda} = \vec{\varepsilon}_{-\vec{k},\lambda}$.

(*) Aufgabe 3(4P): Kommutatorrelationen

Überprüfen Sie die Kommutatorrelation für den Drehimpulsoperator $\vec{L}$ und den Ortsoperator $\vec{r}$

$$[\vec{L}^{\,2}, [\vec{L}^{\,2}, \vec{r}\,]\,] = 2\hbar^2\{\vec{L}^{\,2}, \vec{r}\,\}\,.$$

Berechnen Sie dazu die Kommutatoren $[\vec{L}^{\,2}, x_i]$, wobei x_i eine Komponente des Ortsoperators bezeichnet.
