

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 2

Abgabe: Do. 31.10.13 (12:00 Uhr)

Aufgabe 3: Spin 1/2 (5 Punkte)

Ein Spin $s = \frac{1}{2}$ System hat $2s + 1 = 2$ linear unabhängige Zustände. Man bezeichnet die in positive und negative z -Richtung polarisierten Eigenzustände von $\hat{s}_z$ mit $|\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\rangle$. Die Leiteroperatoren sind folglich

$$|\uparrow\rangle\langle\downarrow| = \frac{1}{2}(\sigma_x + i\sigma_y) \quad \text{und} \quad |\downarrow\rangle\langle\uparrow| = \frac{1}{2}(\sigma_x - i\sigma_y),$$

wobei die Pauli-Matrizen definiert sind als

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

In der $\hat{s}_z$ -Matrixdarstellung sind die beiden Vektoren $(1, 0)^T$ und $(0, 1)^T$ die Eigenzustände von $\sigma_z = \frac{2}{\hbar}\hat{s}_z$.

(a) Was ist die physikalische Bedeutung der Zustände

$$|\overleftrightarrow{\leftarrow}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm |\downarrow\rangle) \quad \text{und} \quad |\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle \pm i|\downarrow\rangle)$$

und der Operatoren

$$\begin{aligned} &|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, & |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow|, \\ &|\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow|, & i|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - i|\uparrow\rangle\langle\downarrow|? \end{aligned}$$

Wie lauten sie in der Matrixdarstellung?

(b) Aus den in (a) gebildeten Zuständen können wir die Projektoren

$$|\overleftarrow{\leftarrow}\rangle\langle\overleftarrow{\leftarrow}|, \quad |\overrightarrow{\rightarrow}\rangle\langle\overrightarrow{\rightarrow}|, \quad |\nearrow\rangle\langle\nearrow|, \quad |\swarrow\rangle\langle\swarrow|,$$

bilden. Beweisen und erläutern sie folgende Identitäten:

$$|\overleftarrow{\leftarrow}\rangle\langle\overleftarrow{\leftarrow}| + |\overrightarrow{\rightarrow}\rangle\langle\overrightarrow{\rightarrow}| = \mathbf{1}, \quad |\nearrow\rangle\langle\nearrow| + |\swarrow\rangle\langle\swarrow| = \mathbf{1}.$$

(c) Ein Spin- $\frac{1}{2}$ System ist in Richtung $\vec{n} = (\sin\theta \sin\phi, \sin\theta \cos\phi, \cos\theta)^T$ polarisiert. Zu welchem Operator ist es nun Eigenzustand? Geben sie die Matrixdarstellung für Operator und Zustand an. Geben sie den in Gegenrichtung polarisierten Zustand an.

- (d) Wiederholen sie (c), indem sie ein in z -Richtung polarisiertes Spin- $\frac{1}{2}$ System betrachten. Führen sie nun eine Rotation aus, so dass das Spin- $\frac{1}{2}$ System nun in $\vec{n}$ Richtung polarisiert ist.
- (e) Es wird die z -Komponente des in (c) betrachteten Spins gemessen. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit für die beiden möglichen Messwerte. Wiederholen sie die Aufgabe für die Messung der x -Komponente.

Aufgabe 4: Geladenes Teilchen im Magnetfeld (5 Punkte)

Der Hamilton-Operator

$$H = \frac{1}{2m} \left(\vec{P} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2$$

eines Teilchens mit Masse m und Ladung q beschreibt ein Teilchen in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B}(\vec{A})$ eines Vektorpotentials $\vec{A}$.

- (a) Betrachten sie $\vec{A}(\vec{x}) = B \cdot (-y, 0, 0)$. Warum kann man P_x , P_z und H gemeinsam diagonalisieren? Geben sie die Eigenwerte von H als Funktion der Eigenwerte von P_x und P_z an. Diskutieren sie die Entartung.
- (b) Betrachten sie nun $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{1}{2}B \cdot (-y, x, 0)$. Das Problem lässt sich wieder auf einen harmonischen Oszillator zurückführen. Verwenden sie die Transformation für

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a_x + a_x^\dagger), \quad P_x = -i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a_x - a_x^\dagger),$$

und die analoge Transformation für y und P_y . Die Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren können durch eine lineare Transformation entkoppelt werden.

- (c) Berechnen sie das Magnetfeld $\vec{B}$ für das in Teilaufgabe (a) und (b) gegebene Vektorpotential $\vec{A}$. Kann man die Vektorpotentiale $\vec{A}$ aus Teilaufgabe (a) und (b) durch folgende Eichtransformation

$$\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda(\vec{x}), \quad \psi(\vec{x}, t) \rightarrow \psi(\vec{x}, t) \exp \left(\frac{i q}{\hbar c} \Lambda(\vec{x}) \right)$$

ineinander überführen? Führt die Eichtransformation zu messbaren Konsequenzen?

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter <http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>