

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 3

Abgabe: 8.11.13 (12:00 Uhr)

Aufgabe 5: Mehr Spaß mit Drehimpulsen (6 Punkte)

Wir betrachten zunächst wieder Spin $\frac{1}{2}$ Teilchen. Deren Drehimpulsalgebra wird mithilfe der Pauli-Matrizen

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ausgedrückt.

- (a) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen hermitesch sind und geben Sie die Spur und die Eigenwerte an. Zeigen Sie, dass $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$ gilt, wobei $\mathbb{1}$ die 2x2 Einheitsmatrix ist. Zeigen Sie auch, dass sich jede 2x2 Matrix M in der Form

$$M = m_0 \mathbb{1} + \sum_{i=x,y,z} m_i \sigma_i \quad (2)$$

ausdrücken läßt. Wie kann man die Koeffizienten m_i direkt bestimmen?

- (b) Berechnen Sie nun $\exp(i \frac{\alpha}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma})$ mit $\vec{n}^2 = 1$. Benutzen Sie hierfür die Reihendarstellung der e-Funktion

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!}. \quad (3)$$

- (c) Betrachten wir jetzt ein Spin 1 Teilchen. Die entsprechenden Matrizen lauten

$$\lambda_x = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_y = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_z = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Überprüfen sie, dass diese Matrizen die gleiche algebraische Relation,

$$[\lambda_i, \lambda_j] = 2i \epsilon_{ijk} \lambda_k \quad (5)$$

wie die Pauli-Matrizen erfüllen. Was sind die Eigenwerte?

- (d) Was ist die physikalische Bedeutung von α ? Vergleichen Sie hierzu $\alpha = 2\pi$ aus (b) mit $\exp(i \frac{\alpha}{2} \vec{n} \cdot \vec{\lambda})$ für $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

Aufgabe 6: Zwei Spin $S = \frac{1}{2}$ Teilchen (4 Punkte)

Ein System besteht aus zwei Spin $S = \frac{1}{2}$ Teilchen und wird durch den Hamilton-Operator

$$H = C - \frac{a+b}{2}(S_{1,z} + S_{2,z})B - \frac{a-b}{2}(S_{1,z} - S_{2,z})B + J\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

beschrieben. a , b und J sind Konstanten und B bezeichnet die z -Komponente eines homogenen äußeren Magnetfeldes. Bestimmen Sie

- (a) die Eigenwerte und Eigenkets für zwei identische Teilchen (Warum muss hier $a = b$ gelten? Es gibt vier Basiskets $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle$, $|\downarrow\uparrow\rangle$ und $|\downarrow\downarrow\rangle$.),
- (b) die Eigenwerte für zwei verschiedene Teilchen.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter
<http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>