

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 4

Abgabe: 15.11.13 (12:00 Uhr)

Aufgabe 7: (6+2 Punkte)

An einem Beschleuniger wird ein neues skalares Teilchen H mit Spin $J = 0$ gefunden, das in ein τ^+ , τ^- -Paar zerfällt. τ^+ und τ^- sind Fermionen mit Spin $S = 1/2$ und mit gleicher Masse. Im Weiteren betrachten wir den Zerfall im Schwerpunktsystem des H -Teilchens. Der Impuls von τ^+ und τ^- ist dann $-\vec{p}/2$ und $\vec{p}/2$ und die Wellenfunktion des Paares im Impulsraum ist $\psi(\vec{p}) = \langle \vec{p} | \psi \rangle$. Wir wollen nun testen ob das H -Teilchen ein Skalar oder ein Pseudoskalar ist.

- (a) Der Ortsoperator in der Impulsdarstellung ist durch

$$\langle \vec{p} | X_i | \psi \rangle = i \hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \psi(\vec{p})$$

gegeben. Begründen Sie warum auch in der Impulsdarstellung die Kugelflächenfunktionen $Y_l^m(\theta, \phi)$ Eigenfunktionen zu $\vec{L}^2$ und L_3 sind. Hierbei sind θ und ϕ in Polarkoordinaten gegeben: $\vec{p} = |\vec{p}|(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T$.

- (b) Die Erhaltung des Gesamtdrehimpulses schränkt die mögliche Form der Wellenfunktionen ein. Um diese zu bestimmen, betrachten wir den Bahndrehimpuls $\vec{L}$ des τ^+ , τ^- -Systems und den Gesamtspin $\vec{S}$ des τ^+ , τ^- -Paares und schreiben die Gesamtwellenfunktion Ψ als

$$\Psi = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m_s=-s}^s \psi(\vec{p}) \otimes |s, m_s\rangle = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{m_s=-s}^s \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m_l=-l}^l a^l(|\vec{p}|) A_{m_l}^l(\theta, \phi) \otimes |s, m_s\rangle. \quad (1)$$

- i) Welche Beziehung folgt aus der Erhaltung des Gesamtdrehimpulses für die Quantenzahlen l, m_l, s, m_s des τ^+ , τ^- -Systems?
- ii) Drücken Sie die Funktionen $A_{m_l}^l(\theta, \phi)$ durch Kugelflächenfunktionen aus.

- (c) Die Wirkung des Paritätsoperators $\mathcal{P}$ auf einen Zustand in Impulsdarstellung ist

$$\mathcal{P} \psi(\vec{p}) = \eta \psi(-\vec{p}).$$

- i) Was sind die möglichen Eigenwerte η des Paritätsoperators?
 - ii) Geben Sie die Transformation $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$ in Polarkoordinaten an.
 - iii) Bestimmen Sie die Parität von $Y_l^m(\theta, \phi)$.
- (d) (2 Bonuspunkte) Ein Teilchen mit Spin $J = 0$ heißt skalar (pseudoskalar), wenn es nur in Endzustände mit Parität $\mathcal{P} = 1$ ($\mathcal{P} = -1$) zerfällt.
- i) Geben Sie die Wellenfunktion (1) für den Zerfall eines skalaren und eines pseudoskalaren H -Teilchens an.
 - ii) Wie sehen die Winkelverteilungen der differentiellen Zerfallsraten

$$\frac{d\Gamma}{d\cos\theta d\phi} \propto |\Psi|^2$$

in den beiden Fällen aus?

- iii) Jetzt werden nur die Zerfälle betrachtet, bei denen $m_{s_{\tau+}} = +1/2$ und $m_{s_{\tau-}} = -1/2$ gilt. Kann man nun ein skalares von einem pseudoskalaren H -Teilchen unterscheiden?
- iv) Im Allgemeinen braucht ein Teilchen mit Spin $J = 0$ kein Eigenzustand von $\mathcal{P}$ zu sein, und $a^s(|\vec{p}|)$ ist nicht mehr eingeschränkt. Wie sieht die Winkelverteilung nun aus (für den Fall iii))?

Aufgabe 8: Isospin der Baryonen (4 Punkte)

Die Generatoren T_k , $k = 1, 2, 3$ des *Isospins* $\vec{T}$ erfüllen (bis auf den Faktor $\hbar$) die gleichen Vertauschungsrelationen wie der Spin, $[T_j, T_k] = i\epsilon_{jkl}T_l$, und

$$\vec{T}^2 |tt_3\rangle = t(t+1)|tt_3\rangle, \quad T_3 |tt_3\rangle = t_3 |tt_3\rangle.$$

Die Zustände $|u\rangle$ des Up- und $|d\rangle$ des Down-Quarks bilden ein Isospin-Dublett: $|u\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}\rangle$ und $|d\rangle = |\frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle$. Die elektrischen Ladungen des Up- und Down-Quarks sind $+2/3e$ und $-1/3e$. Der Hamilton-Operator H_s der starken Wechselwirkung, die die Bindung der Quarks zu Hadronen bewirkt, erfüllt $[H_s, \vec{T}] = 0$. Die Eigenzustände von H_s entsprechen den Hadronen.

Baryonen sind Hadronen, die aus drei Valenzquarks zusammengesetzt sind.¹ Ausgangspunkt ist die Basis aus gemeinsamen Eigenzuständen von $\vec{T}_1^2, \vec{T}_2^2, \vec{T}_3^2, T_{13}, T_{23}$ und T_{33} , $|q_1 q_2 q_3\rangle = |t_{13} t_{23} t_{33}\rangle$, wobei $(\vec{T}_k^2, T_{k3})$ die Isospin-Quantenzahlen (t_k, t_{k3}) von q_k messen. (Beispiel: $|uud\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle$ oder kurz $|uud\rangle = |\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{-1}{2}\rangle$.)

¹Außer Valenzquarks enthält ein Baryon noch sog. *See-Quarks*, *See-Antiquarks* und *Gluonen*, die sich jedoch zu ungeladenen Isospin-0-Zuständen kombinieren und für diese Aufgabe irrelevant sind.

- (a) (2 Punkte) Es seien $\vec{T}' = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Wechseln Sie zur Basis $\{|t', t'_3 t_{33}\rangle\}$ aus gemeinsamen Eigenzuständen von $\vec{T}'^2, \vec{T}_1^2, \vec{T}_2^2, \vec{T}_3^2, T'_3$ und T_{33} . Geben Sie die möglichen Werte von (t', t'_3) an und drücken Sie $|t', t'_3 t_{33}\rangle$ durch $|q_1 q_2 q_3\rangle$ aus.
- (b) (2 Punkte) Wechseln Sie nun zur Basis $\{|t t', t_3\rangle\}$ aus Eigenzuständen von $\vec{T}^2, \vec{T}'^2, \vec{T}_1^2, \vec{T}_2^2, \vec{T}_3^2$ und T_3 , wobei $\vec{T} = \vec{T}' + \vec{T}_3$ der Gesamt-Isospin ist. Welche Kombinationen von (t, t', t_3) treten auf? Zählen Sie die Zahl der Zustände in der neuen Basis und der ursprünglichen Basis $\{|q_1 q_2 q_3\rangle\}$. Drücken Sie die Zustände mit $t = 3/2$ durch $|q_1 q_2 q_3\rangle$ aus. Welche elektrische Ladung haben Sie?

Die Masse eines Hadrons mit Up- und Down-Valenzquarks ist fast ausschließlich durch E_s/c^2 gegeben, wobei E_s der Eigenwert von H_s ist. Proton p und Neutron n sind die einzigen Baryonen mit einer Masse von $0,94 \text{ GeV}/c^2$. Welche Werte von (t, t_3) kommen für p und n in Frage? Es gibt vier Baryonen $\Delta^{++}, \Delta^+, \Delta^0, \Delta^-$ mit Masse $1,23 \text{ GeV}/c^2$ und Ladungen $2e, e, 0$ und $-e$. Welchen Zuständen (t, t', t_3) entsprechen sie?

Hinweis: Clebsch-Gordan-Koeffizienten finden Sie bei <http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/clebrpp.ps>.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter <http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>