Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014 — Blatt 5 — Abgabe: 22.11.13 (12:00 Uhr)

Aufgabe 9: Isospin der Mesonen (6 Punkte)

Mesonen enthalten ein Valenzquark und ein Valenz-Antiquark. Anti-Up- und Anti-Down-Quark, $\overline{u}$ und $\overline{d}$, haben die Ladungen $-2/3e$ und $1/3e$. In dieser Aufgabe werden die Zerfälle $B^+ \to \pi^+\pi^0$, $B^0 \to \pi^0\pi^0$, $B^0 \to \pi^+\pi^-$ betrachtet. Die Valenz-(Anti-)Quarks der B-Mesonen sind durch $B^+ \sim \overline{b}u$ und $B^0 \sim \overline{b}d$ gegeben, wobei das Anti-Bottom-Quark $\overline{b}$ Isospin 0 hat, (B^+, B^0) also ein Isospin-Dublett ist. $(\pi^+, \pi^0, \pi^-) = (\overline{d}u, (\overline{d}d - \overline{u}u)/\sqrt{2}, -\overline{u}d)$ ist ein Isospin-Triplett, d.h. $I_\pi = 1$ und $(I_\pi)_3 = 1, 0, -1$. Die B- und π-Mesonen haben Spin 0.

(a) Isospindrehungen für Quarks und Antiquarks (1 Punkt): Betrachten Sie die Transformation des Isospin Dubletts, $q = (u, d)^T$, unter einer Rotation U im Isospinraum. Die Rotation ist gegeben durch

$$U = \exp(\mathrm{i}\ \vec{\alpha} \cdot \vec{\tau}),$$

wobei die α_i die Rotationswinkel im Isospinraum sind und die $\tau_i = \frac{1}{2}\sigma_i$ die Generatoren der Isospingruppe mit den Pauli-Matrizen σ_i darstellen.

i) Berechnen Sie U und $q' = Uq$ für eine Rotation um $\alpha = (0, \pi, 0)^T$.

ii) Wie sieht das Dublett der Antiquarks aus? Machen Sie hierzu den Ansatz $\overline{q} = (\overline{d}, \pm\overline{u})^T$ und führen Sie eine Rotation um $\alpha = (0, \pi, 0)^T$ aus. Vergleichen Sie q' und $\overline{q}'$. Was ist das korrekte Vorzeichen?

(b) Isospineigenschaften des π-Meson Systems (1 Punkt): Wir wollen jetzt das π-Meson System näher untersuchen. Zerlegen Sie dazu die Zwei-π-Mesonzustände $|\pi^+\pi^-\rangle$, $|\pi^+\pi^0\rangle$ und $|\pi^0\pi^0\rangle$ in Eigenzustände von $\vec{I}^{\,2}_{\pi\pi}$ und $(I_{\pi\pi})_3$, wobei $\vec{I}_{\pi\pi} = \vec{I}_{\pi_1} + \vec{I}_{\pi_2}$ der Gesamtisospin des Pionsystems ist. Zeigen Sie, dass die symmetrischen Zustände nur $I_{\pi\pi} = 0$ oder 2 haben.

Hinweis: Die Clebsch-Gordan Koeffizienten dazu können aus Tabellen entnommen werden, wie zum Beispiel `http://pdg.lbl.gov/2005/reviews/clebrpp.ps`.

(**c**) B^+-Zerfall (1 Punkt): Wir betrachten jetzt $B^+ \to \pi\pi$ Zerfälle, die durch die schwache Wechselwirkung bewirkt werden. Der zugehörige Hamiltonoperator H_w verletzt die Isospin-Symmetrie. Wieso kann B^+ nicht in $\pi^0\pi^0$ zerfallen? Zeigen Sie, dass $\langle B^+|H_w|1,1\rangle = 0$ gilt. Sie können dabei verwenden, dass $\langle\vec{p}\,|\pi^+\pi^0\rangle = \langle\vec{p}\,|\pi^0\pi^+\rangle$ aufgrund der Eigenschaften des Ausgangszustandes ($l = 0, m = 0$). Die Flugrichtung des ersten Pions im Endzustand definiert die Richtung von $\vec{p}$ im Ruhesystem des B^+, also eigentlich $\langle\vec{p}\,|\pi^+\pi^0\rangle = \langle-\vec{p}\,|\pi^0\pi^+\rangle$.

(**d**) $B^0 \to \pi^0\pi^0$ und $B^0 \to \pi^+\pi^-$ (1 Punkt): Analog zu den B^+-Zerfällen gilt auch hier $\langle\, 1\,0\,|H_w|\,B^0\,\rangle = 0$. Drücken Sie

$$A_{00} = \langle\, \pi^0\pi^0\,|H_w|\,B^0\,\rangle \text{ und } A_{+-} = \frac{\langle\, \pi^+\pi^-\,|H_w|\,B^0\,\rangle + \langle\, \pi^-\pi^+\,|H_w|\,B^0\,\rangle}{\sqrt{2}}\;.$$

durch $A_2 := \langle\, 2\,0\,|H_w|\,B^0\,\rangle$ und $A_0 := \langle\, 0\,0\,|H_w|\,B^0\,\rangle$ aus.

(**e**) Das $B \to \pi\pi$-System (2 Punkte): Der Hamiltonoperator lässt sich zerlegen in $H_w = H^{\Delta I_{\pi\pi}=3/2} + H^{\Delta I_{\pi\pi}=1/2}$. Warum ist $A_2 = \langle\, 2\,0\,|H^{\Delta I_{\pi\pi}=3/2}|\,B^0\,\rangle$ und $A_0 = \langle\, 0\,0\,|H^{\Delta I_{\pi\pi}=1/2}|\,B^0\,\rangle$? Berechnen Sie $\langle\, 2\,1\,|H^{\Delta I_{\pi\pi}=3/2}|\,B^+\,\rangle / \langle\, 2\,0\,|H^{\Delta I_{\pi\pi}=3/2}|\,B^0\,\rangle$ und drücken Sie

$$A_{+0} = \frac{\langle\, \pi^+\pi^0\,|H_w|\,B^+\,\rangle + \langle\, \pi^0\pi^+\,|H_w|\,B^+\,\rangle}{\sqrt{2}}$$

durch A_2 aus. Welche Beziehung finden Sie zwischen A_{00}, A_{+-} und A_{+0}?

Hinweis: In $\langle I\, I_3|H^{\Delta I}|I'\, I'_3\rangle$ erfüllen I', ΔI und I die Auswahlregeln einer Drehimpulsaddition von I und ΔI zu I' (Wigner-Eckart-Theorem).

Aufgabe 10: Clebsch-Gordan-Koeffizienten (4 Punkte)

Bestimmen Sie die Zustände eines Systems mit Bahndrehimpuls $j_1 = l$ und Spin $j_2 = 1$. Schreiben Sie dazu die Zustände $|\, j, m\,\rangle$ in der Form

$$|\, j, m\,\rangle = A_{l,1,m-1,1}|l,1,m-1,1\rangle + A_{l,1,m,0}|l,1,m,0\rangle + A_{l,1,m+1,-1}|l,1,m+1,-1\rangle\;. \quad (1)$$

Geben Sie explizite (rekursive) Ausdrücke für die Koeffizienten an. Wie lauten speziell die Zustände $|\, l+1, l+1\,\rangle$, $|\, l, l\,\rangle$ und $|\, l-1, l-1\,\rangle$?

Hinweis: Sie können verwenden, dass

$$
\begin{aligned}
|\, l+1, l-1\,\rangle &= \sqrt{\frac{l(2l-1)}{(l+1)(2l+1)}}|l,1,l-2,1\rangle + \sqrt{\frac{4l}{(l+1)(2l+1)}}|l,1,l-1,0\rangle \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{(l+1)(2l+1)}}|l,1,l,-1\rangle \ , \\
|\, l, l-1\,\rangle &= -\sqrt{\frac{(2l-1)}{l(l+1)}}|l,1,l-2,1\rangle + \sqrt{\frac{(l-1)^2}{l(l+1)}}|l,1,l-1,0\rangle \\
&\quad + \sqrt{\frac{1}{(l+1)}}|l,1,l,-1\rangle \ .
\end{aligned}
$$

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter
http://www.ttp.kit.edu/∼spinrath/theoe.htm