

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 8

Abgabe: 13.12.13 (12:00 Uhr)

Name:

Tutor:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe 15: Das 1s-Niveau (10 Punkte)

Wir betrachten den 1s-Zustand des Wasserstoffatoms. Sein ungestörter Hamilton-Operator wird mit $H^{(0)}$ bezeichnet. Nun sollen kumulativ verschiedene Störungen betrachtet werden:

- (a) (5 Punkte) Berechnen Sie die Korrekturen, die aus den Feinstrukturtermen stammen. D.h. berechnen Sie die Korrekturen 1. Ordnung zu den Eigenwerten des Hamiltonoperators die aus

- i) Korrekturen zur kinetischen Energie

$$K_1 = -\frac{P^4}{8m^3c^2},$$

- ii) der Spin-Bahn Kopplung

$$K_2 = \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{\vec{L} \cdot \vec{S}}{r^3},$$

- iii) und dem Darwin-Term

$$K_3 = \frac{\pi e^2 \hbar^2}{2m^2c^2} \delta(\vec{r})$$

stammen. Hier bezeichnet $S(L)$ den Spin (Bahndrehimpuls) des Elektrons, m die Masse des Elektrons, $\vec{r}$ den vom Proton zum Elektron zeigenden Vektor und $r = |\vec{r}|$ die Länge dieses Vektors. Die Korrektur kann man als $H = H^{(0)} + K$ schreiben, wobei $K = K_1 + K_2 + K_3$. Bestimmen sie K für das 1s-Niveau.

- (b) (2 Punkte) Eine weitere, schwächere, Korrektur entsteht durch das vom Kern-Spin erzeugte Magnetfeld. Sie wird Hyperfeinstruktur genannt und beinhaltet folgende Korrekturterme:

$$W_{\text{hf}} = \frac{e^2 g_p}{2Mmc^2} \left\{ \frac{1}{r^3} \vec{L} \cdot \vec{I} + \frac{1}{r^3} \left[\frac{3}{r^2} (\vec{S} \cdot \vec{r})(\vec{I} \cdot \vec{r}) - \vec{S} \cdot \vec{I} \right] + \frac{8\pi}{3} \vec{S} \cdot \vec{I} \delta^{(3)}(\vec{r}) \right\}. \quad (1)$$

Hier bezeichnet I den Spin des Protons, M die Masse des Protons und $g_p = 5,585$ das gyromagnetische Moment des Protons. Für den 1s-Zustand tragen die ersten zwei Terme in (1) nicht bei. Berechnen Sie das Matrixelement

$$\langle n = 1; l = 0; m_l = 0; m'_S; m'_I | \frac{4\pi e^2 g_p}{3Mmc^2} \vec{S} \cdot \vec{I} \delta(\vec{r}) | n = 1; l = 0; m_l = 0; m_S; m_I \rangle .$$

des letzten Terms in (1). Für das 1s-Niveau kann man folglich die Korrekturen aus Feinstruktur und Hyperfeinstruktur als $H = H^{(0)} + K + A \vec{I} \cdot \vec{S}$ schreiben. Berechnen Sie die Konstante A und geben Sie die Eigenzustände des Operators $A \vec{I} \cdot \vec{S}$ und die jeweilige Energiekorrektur an.

- (c) (3 Punkte) Nun werden die Korrekturen in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = (0, 0, B)^T$ betrachtet. Hierbei kann man die Kopplung des Protons an das Magnetfeld vernachlässigen und erhält den Korrekturterm

$$H = H^{(0)} + K + A \vec{I} \cdot \vec{S} + \omega_0 (L_z + 2S_z), \quad \omega_0 = -\frac{e}{2m} B.$$

Wir betrachten nun den Fall eines schwachen Feldes, d.h. $\hbar\omega_0 \ll A\hbar^2$, und berechnen die Korrekturen auf die Eigenzustände und Energien.

- i) Geben Sie zunächst die Störung in der Basis $|j, m_j\rangle$ des addierten Elektron- und Proton-Spins an.
- ii) Berechnen Sie mittels entarteter Störungsrechnung die Energiekorrekturen bis zur Ordnung ω_0^2/A .

alt: Berechnen Sie aus den Ergebnissen für $\langle j, m_j | S_z | j', m'_j \rangle$ die Eigenzustände in erster Ordnung in ω_0 und die Eigenwerte in erster und zweiter Ordnung in ω_0 .

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter <http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>