

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 9

Abgabe: 20.12.13 (12:00 Uhr)

Name:

Tutor:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe 16: Teilchen im statischen elektrischen Feld (4 Punkte)

Wir betrachten ein Wasserstoffatom in einem elektrischen Feld $\vec{E} = (0, 0, E)^T$ parallel zur z-Achse. Der entstehende Störterm

$$W = -e\vec{E} \cdot \vec{x} = -eEz$$

sei so stark, dass Feinstruktur und Hyperfeinstruktur vernachlässigt werden können. Im weiteren sollen die Eigenzustände in nullter und Energien in erster Ordnung Störungstheorie für das $n = 1$ - und $n = 2$ -Niveau berechnet werden.

- (a) (1 Punkt) Einige Matrixelemente $\langle n', l', m' | W | n, l, m \rangle$ verschwinden. Betrachten Sie dazu
- i) das Matrixelement $\langle n', l', m' | [L_z, -eEz] | n, l, m \rangle$ und
 - ii) die Parität von $|n, l, m\rangle$ und $\vec{x}$.

Welche Matrixelemente verschwinden aufgrund der obigen Überlegungen.

- (b) (3 Punkte) Berechnen Sie nun die verbleibenden Matrixelemente für das $n = n' = 1$ - und $n = n' = 2$ -Niveau. Bestimmen Sie die Korrekturen nullter Ordnung zu den Eigenzuständen und die Korrekturen erster Ordnung zu den Energien.

Aufgabe 17: Variationsmethode für das 1s-Niveau (3 Punkte)

Wir wollen die Grundzustandsenergie des Wasserstoffatoms mit Hilfe der Variationsmethode berechnen, indem wir die kugelsymmetrischen Funktionen $\phi_\alpha(\vec{x})$ als Vergleichsfunk-

tionen wählen, deren r -Abhängigkeit gegeben ist durch

$$\phi_\alpha(\vec{x}) = \begin{cases} C \left(1 - \frac{r}{\alpha}\right) & \text{für } r \leq \alpha \\ 0 & \text{für } r > \alpha; \end{cases}$$

C ist eine Normierungskonstante und α der Variationsparameter.

- (a) (1.5 Punkte) Berechnen Sie den Erwartungswert der kinetischen und der potentiellen Energie des Elektrons im Zustand $|\phi_\alpha\rangle$. Drücken Sie den Erwartungswert der kinetischen Energie in Abhängigkeit von $p_r\phi_\alpha$ aus, um die „Deltafunktionen“ zu vermeiden, die in $p_r^2\phi_\alpha$ auftreten. Verwenden Sie dazu die Hermitezität von $p_r = -i\hbar\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}r = -i\hbar\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right)$.
- (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den optimalen Wert α_0 von α und vergleichen Sie ihn mit dem Bohr-Radius a_0 . Bestimmen Sie hierzu auch die Normierungskonstante C .
- (c) (0.5 Punkte) Vergleichen Sie den Näherungswert, der sich für die Grundzustandsenergie ergibt, mit dem exakten Ergebnis.

Aufgabe 18: Entartet oder nicht? (3 Punkte)

Ein System mit drei orthonormierten Zuständen $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$ hat einen Hamilton-Operator

$$H = E_1|1\rangle\langle 1| + E_1|2\rangle\langle 2| + E_2|3\rangle\langle 3| + a|1\rangle\langle 3| + b|2\rangle\langle 3| + a^*|3\rangle\langle 1| + b^*|3\rangle\langle 2|.$$

Zusätzlich kann $E_2 - E_1 \gg |a|$ und $E_2 - E_1 \gg |b|$ angenommen werden. Berechnen Sie die Eigenwerte

- (a) (1 Punkt) durch die nicht entartete Störungstheorie zweiter Ordnung,
- (b) (1 Punkt) durch exaktes Diagonalisieren,
- (c) (1 Punkt) durch die entartete Störungstheorie zweiter Ordnung.

Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse. Ist das Vorgehen in (a) korrekt?

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter <http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>