

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 10

Abgabe: 10.01.14 (12:00 Uhr)

Name:

Tutor:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe 19: Entartet oder nicht Teil II (3 Punkte)

Ein System mit drei orthonormierten Zuständen $(|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle)$ hat einen Hamilton-Operator

$$H = E_1|1\rangle\langle 1| + E_1|2\rangle\langle 2| + E_2|3\rangle\langle 3| + a|1\rangle\langle 3| + b|2\rangle\langle 3| + a^*|3\rangle\langle 1| + b^*|3\rangle\langle 2|.$$

Zusätzlich kann $E_2 - E_1 \gg |a|$ und $E_2 - E_1 \gg |b|$ angenommen werden. Berechnen Sie

- (a) (1 Punkt) die Korrekturen zu den Eigenwerten in dritter Ordnung Störungstheorie und
- (b) (2 Punkte) die Korrekturen zu den Eigenzuständen in erster Ordnung Störungstheorie.

Aufgabe 20: Elektron im Kristall (7 Punkte)

Ein Elektron mit Masse m , das sich in einem Kristall bewegt kann durch ein freies Elektron beschrieben werden, dessen Wellenfunktion durch ein periodisches Potential $V(x)$ mit Periodenlänge a ($V(x+a) = V(x)$) gestört wird.

- (a) (1 Punkt) Geben Sie die ungestörten Eigenenergien $E_0(k)$ und Eigenfunktionen $\phi_k(x)$ an. Normieren Sie diese im Volumen $L = Na$ mit periodischen Randbedingungen:

$$\phi_k(x + Na) = \phi_k(x).$$

(b) (1 Punkt) Wie hoch ist der Entartungsgrad der ungestörten Energien $E_0(k)$? Welche Wellenzahlen tragen zur Fourier-Zerlegung von $V(x)$ bei?

(c) (2 Punkte) Welche notwendige Bedingung müssen k und k' erfüllen, damit

$$\langle \phi_k | V | \phi_{k'} \rangle \neq 0 ?$$

Welche dieser Zustände $|\phi_k\rangle$, $|\phi_{k'}\rangle$ haben zusätzlich dieselbe Energie?

(d) (3 Punkte) Berechnen Sie die Energiekorrekturen in erster Ordnung Störungstheorie und diagonalisieren die Zustände im entarteten Unterraum.

Bonusaufgabe 21: Kernumwandlung (2 Bonuspunkte)

Durch einen spontanen β -Zerfall wird der Kern eines Tritium (H^3) Atoms in den Kern des He^3 umgewandelt. Dabei wird das entstehende Elektron mit einer Energie von bis zu 17 keV abgestrahlt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der sich das resultierende Ion in einem Quantenzustand mit Hauptquantenzahl $n = 2$ befindet.

Bonusaufgabe 22: Asymptotische Zustände (3 Bonuspunkte)

Ein System sei durch ein zeitunabhängiges Potential V_0 bestimmt. Die diskreten Energieniveaus und die zugehörigen Eigenzustände können als bekannt vorausgesetzt werden ($H_0|i\rangle = E_i|i\rangle$). Nun wird noch ein wandernder Puls

$$V(t) = A\delta(x - ct)$$

als zeitabhängige Störung hinzugefügt.

(a) (2 Bonuspunkte) Das System befinde sich für $t = -\infty$ im Grundzustand, dessen Eigenfunktion durch $u_i(x) = \langle x | i \rangle$ gegeben ist. Berechnen sie die Wahrscheinlichkeit das System für $t = \infty$ in einem angeregten Zustand, der durch eine Wellenfunktion $u_f(x) = \langle x | f \rangle$ gegeben ist, zu finden.

(b) (1 Bonuspunkt) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse aus Teilaufgabe (a) physikalisch indem sie die δ -Funktion als Superposition harmonischer Störungen betrachten, wobei

$$\delta(x - ct) = \frac{1}{2\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega[\frac{x}{c} - t]}$$

Diskutieren sie die Rolle der Energieerhaltung. Diese gilt auch in der Quantenmechanik für den Fall einer lang anhaltenden Störung.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter
<http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>