Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014 | Blatt 11 | Abgabe: 17.01.14 (12:00 Uhr)

Name: Tutor:

Matrikelnummer: Übungsgruppe:

Aufgabe 23: Kohärente Zustände (4 Punkte)

Ein idealer kohärenter Zustand $|\,\alpha\,\rangle$ lässt sich schreiben als

$$|\,\alpha\,\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\,n\,\rangle \ .$$

Dabei ist α eine beliebige nichtverschwindende komplexe Zahl, die den kohärenten Zustand vollständig definiert und $|\,n\,\rangle$ sind Eigenzustände des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie, dass

$$|\,\alpha\,\rangle = \mathrm{e}^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \mathrm{e}^{\alpha a^\dagger} |\,0\,\rangle$$

und dass $|\,\alpha\,\rangle$ eine minimale Unschärfe hat, das heißt

$$\langle\,\alpha\,|\Delta x|\,\alpha\,\rangle \langle\,\alpha\,|\Delta p|\,\alpha\,\rangle = \frac{\hbar}{2} \ .$$

Sie können dabei verwenden, dass kohärente Zustände Eigenzustände des Vernichtungsoperators sind mit

$$a|\,\alpha\,\rangle = \alpha|\,\alpha\,\rangle \ .$$

Und zur Erinnerung gilt

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} \left(a + a^\dagger\right) \ \text{und}\ p = -\,\mathrm{i}\,\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}} \left(a - a^\dagger\right) \ .$$

Aufgabe 24: No-Cloning Theorem (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass es keinen unitären Operator U gibt, der einen beliebigen quantenmechanischen Zustand kopieren kann. Unter einem Kopierprozess versteht man folgende Abbildungsvorschrift:

$$|\,\chi \otimes \phi\,\rangle \to |\,\chi \otimes \chi\,\rangle \ \text{oder}\ U|\,\chi \otimes \phi\,\rangle = |\,\chi \otimes \chi\,\rangle \ .$$

$|\,\phi\,\rangle$ ist dabei derjenige Zustand, der von U mit $|\,\chi\,\rangle$ überschrieben werden soll. Um das No-Cloning Theorem zu zeigen, wählen Sie zwei beliebige normierte Zustände $|\,\chi_1\,\rangle$ und $|\,\chi_2\,\rangle$ und betrachten sie das folgende Überlappelement

$$X = \langle\, \chi_1 \otimes \phi \,| U^\dagger U |\, \chi_2 \otimes \phi \,\rangle \,.$$

Aufgabe 25: Symmetrien und Erhaltungsgrößen (4 Punkte)

Das Noether-Theorem der klassischen Mechanik liefert einen Zusammenhang zwischen kontinuierlichen Symmetrien und Erhaltungsgrößen eines Systems. In dieser Aufgabe soll eine quantenmechanische Variante dieses Theorems betrachtet werden.

Ein quantenmechanisches System sei invariant unter einer kontinuierlichen Transformation, die beschrieben sei durch den unitären Operator $U(\phi)$, wobei ϕ ein reeller Parameter ist mit $U(0) = 1$. Das heißt, der transformierte Hamiltonoperator

$$H(\phi) = U(\phi) H U(\phi)^\dagger$$

sei unabhänging von ϕ.

(a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Größe

$$Q = \mathrm{i}\frac{\partial U}{\partial \phi}(\phi = 0)$$

ein selbstadjungierter Operator ist, d.h. eine quantenmechanische Observable darstellt.

(b) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass Q eine Erhaltungsgröße des Systems ist.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter
http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm