Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014 — Blatt 12 (Übungsklausur) — Abgabe: 24.01.14 (12:00 Uhr)

Name:	Tutor:
Matrikelnummer:	Übungsgruppe:

Lesen Sie bitte erst diese Hinweise durch bevor Sie sich die Aufgaben anschauen.

Dieses Blatt ist eine Übungsklausur. Vom Umfang und Schwierigkeitsgrad her ist sie ähnlich zur Klausur am Ende des Semesters. Sie sollten am Besten bei der Bearbeitung dieses Blattes eine Klausursituation simulieren.

Das heißt setzen Sie sich nur mit dem Übungsblatt und leerem Papier hin und versuchen Sie die Aufgaben innerhalb von 120 Minuten zu bearbeiten. In der Klausur wird als einziges Hilfsmittel ein selbstbeschriebenes DIN-A4-Blatt zugelassen. Alle schwierigen Formeln werden angegeben werden. Schauen Sie die Aufgaben auch am Besten vorher nicht an und reden nicht mit ihren Mitstudierenden darüber bevor Sie nicht alle die Aufgaben bearbeitet haben.

Beachten Sie auch, dass es hier nur 10 Punkte gibt wie bei jedem anderen Übungsblatt auch. In der echten Klausur wird es mehr Punkte geben, um die Ergebnisse differenzierter zu bewerten.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter
http://www.ttp.kit.edu/∼spinrath/theoe.htm

Aufgabe 1: Quickies (1 Punkt)

(**a**) Wenn ich zwei Spin-1 Zustände addiere, wie viele mögliche Spinzustände erhalte ich dann? Welche Gesamtdrehimpulse sind möglich?

(**b**) Welche Eigenschaften muss der Hamilton-Operator haben, damit man das Wigner-Eckart-Theorem verwenden kann?

(**c**) Bei der Spin-Bahn-Kopplung sind die magnetische Drehimpulsquantenzahl m_l und Spinquantenzahl m_s keine guten Quantenzahlen mehr. Wie schreibt man das Produkt $\vec{L} \cdot \vec{S}$ des Bahndrehimpuls und Spinoperators so um, dass es auf den Produktzustand angewendet nur noch gute Quantenzahlen ergibt?

(**d**) Wie groß ist die Energieentartung der 2p-Schale ($n = 2$, $l = 1$) des ungestörten Wasserstoffatoms bezüglich der m Quantenzahl? Wie viele Elektronen passen demnach in diese Schale?

Aufgabe 2: Clebsch-Gordan-Sudoku (3 Punkte)

Gegeben sei ein System aus zwei Drehimpulsen $|\, j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,\rangle$ mit $j_1 = 1$ und $j_2 = \frac{1}{2}$, das zu einem System $|\, j\, m \,\rangle$ mit Gesamtdrehimpuls j addiert wird. Die Zustände $|\, j\, m \,\rangle$ können als Linearkombinationen von $|\, j_1\, j_2\, m_1\, m_2 \,\rangle$ geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} |\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{2}\,\rangle \\ |\,\frac{3}{2}\,\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,\frac{3}{2}\,-\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,\frac{3}{2}\,-\frac{3}{2}\,\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} |\,1\,\frac{1}{2}\,1\,\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,1\,\frac{1}{2}\,1\,-\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,1\,\frac{1}{2}\,0\,\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,1\,\frac{1}{2}\,0\,-\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,1\,\frac{1}{2}\,-1\,\frac{1}{2}\,\rangle \\ |\,1\,\frac{1}{2}\,-1\,-\frac{1}{2}\,\rangle \end{pmatrix}$$

(**a**) Geben Sie die Elemente a_{ij} an, für die $a_{ij} = 0$ gilt. Begründen Sie ihr Ergebnis.

(**b**) Weiterhin ist $a_{45} = a_{22} = 1/\sqrt{3}$ und die Elemente a_{11}, a_{23}, a_{32}, a_{44}, a_{55} und a_{66} sind größer oder gleich Null. Geben Sie nun alle Elemente a_{ij} an, die nicht verschwinden. Begründen Sie ihr Ergebnis.

Aufgabe 3: ρ^0-Zerfall (3 Punkte)

Das ρ^0-Meson hat Spin 1, π-Mesonen haben Spin 0.

(**a**) Betrachten Sie den Zerfall

$$\rho^0 \to \pi^+\pi^- ,$$

wobei $\langle \vec{p} \,|\, \pi^+\pi^- \rangle$ beschreibt den Zustand, in dem das π^+ aus dem Zerfall den Impuls $\frac{\vec{p}}{2}$ und das π^- den Impuls $-\frac{\vec{p}}{2}$ hat. Entsprechend $\langle \vec{p} \,|\, \pi^+\pi^- \rangle = \langle -\vec{p} \,|\, \pi^-\pi^+ \rangle$. Das ρ^0-Meson sei in einem Zustand mit $S_z |\, \rho^0 \rangle = \hbar |\, \rho^0 \rangle$.

i) Bestimmen Sie die Funktion $X(\theta, \phi)$ in $\langle \vec{p} \,|\, \pi^+\pi^- \rangle = X(\theta, \phi) \cdot f(|\vec{p}|)$, wobei $(|\vec{p}|, \phi, \theta)$ die Polarkoordinaten von $\vec{p}$ sind. Begründen Sie ihr Ergebnis.

ii) Bestimmen Sie die Parität von $\langle \vec{p} \,|\, \pi^+\pi^- \rangle$.

(**b**) Warum ist der Zerfall $\rho^0 \to \pi^0\pi^0$ verboten?

Aufgabe 4: Stark-Effekt (3 Punkte)

Wir betrachten das $n = 2$-Niveau des Wasserstoffatoms mit Störterm

$$W = -e\vec{E} \cdot \vec{x} = -eEz \qquad (\vec{E} = (0, 0, E)^T) ,$$

der so stark ist, dass Feinstruktur und Hyperfeinstruktur vernachlässigt werden können.

Wenn wir die Zustände $|\, n\,l\,m \rangle$ mit $(|\,2\,1\,1\,\rangle, |\,2\,1\,0\,\rangle, |\,2\,1\,{-1}\,\rangle, |\,2\,0\,0\,\rangle) = (|\,1\,\rangle, |\,2\,\rangle, |\,3\,\rangle, |\,4\,\rangle)$ bezeichnen, können wir die Störung in Matrixform angeben:

$$\langle\, i \,| W |\, j \,\rangle = W_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

(**a**) Begründen Sie, warum nur W_{24} und W_{42} von Null verschieden sein können.

(**b**) Diagonalisieren Sie die Störung im entarteten Unterraum und geben Sie Eigenzustände und Eigenwerte an. Berechnen Sie die Korrekturen erster Ordnung zu den Energien.

(**c**) Berechnen Sie λ.

Ergänzende Hinweise

Die Kugelflächenfunktionen, Y_l^m, für kleine l lauten

$$Y_0^0 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \,, \tag{1a}$$

$$Y_1^0 = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \,, \tag{1b}$$

$$Y_1^{-1} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\phi} = -Y_1^1 \,, \tag{1c}$$

und die Radialfunktionen, R_{nl}, für kleine n

$$R_{10} = 2 \left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{a_0}} \,, \tag{2a}$$

$$R_{20} = 2 \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \left(1 - \frac{Zr}{2a_0}\right) \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{2a_0}} \,, \tag{2b}$$

$$R_{21} = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{Z}{2a_0}\right)^{\frac{3}{2}} \frac{Zr}{a_0} \mathrm{e}^{-\frac{Zr}{2a_0}} \,. \tag{2c}$$

Weiterhin gilt

$$\int_0^\infty \mathrm{d}r \, r^n \mathrm{e}^{-\frac{r}{a_0}} = n! \, a_0^{n+1} \tag{3}$$