Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014 Blatt 13 Abgabe: 31.01.14 (12:00 Uhr)

Name: Tutor:

Matrikelnummer: Übungsgruppe:

Aufgabe 26: Harmonischer Oszillator mit elektrischem Puls (4 Punkte)

Wir betrachten einen eindimensionalen harmonischen Oszillator mit der Masse m, der Frequenz ω_0 und der Ladung q. Mit $|\,\phi_n\,\rangle$ und $E_n = \hbar\omega_0\left(n + \frac{1}{2}\right)$ bezeichnen wir die Eigenzustände bzw. Eigenenergien eines Hamilton-Operators H_0.

Für $t < 0$ befindet sich der Oszillator im Grundzustand $|\,\phi_0\,\rangle$. Bei $t = 0$ wird er einem elektromagnetischen „Puls“ der Dauer τ ausgesetzt. Die entsprechende Störung kann folgendermassen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} W(t) &= \quad -qEx \qquad \text{für } 0 \le t \le \tau\,, \\ W(t) &= \qquad 0 \qquad\;\; \text{für } t < 0 \text{ und } t > \tau\,. \end{aligned}$$

E steht für die Amplitude des Feldes, und x ist die Ortsobservable. Es sei P_{0n} die Wahrscheinlichkeit, den Oszillator nach dem Puls im Zustand $|\,\phi_n\,\rangle$ zu finden.

(**a**) (1 Punkt) Berechnen Sie P_{01} mit Hilfe der zeitabhängigen Störungstheorie erster Ordnung. Wie ändert sich P_{01} für festes ω_0 mit τ?

(**b**) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass zur Bestimmung von P_{02} die zeitabhängige Störungstheorie mindestens auf die zweite Ordnung ausgedehnt werden muss. Berechnen Sie P_{02}.

(**c**) (2 Punkte) Geben Sie die exakten Ausdrücke für P_{01} und P_{02} an, in denen der Translationsoperator explizit auftritt. Führen Sie eine Potenzreihenentwicklung durch, um die in (**a**) und (**b**) gewonnenen Ergebnisse zu überprüfen.

Aufgabe 27: Zusammengesetztes Spin-System (4 Punkte)

Betrachten Sie ein System, das sich aus zwei Spin-1/2-Objekten zusammensetzt. Für $t < 0$ sei der Hamiltonoperator unabhängig vom Spin und kann gleich null angenommen werden, wenn die Energieskala entsprechend gewählt wird. Für $t > 0$ sei H gegeben durch

$$H = \left(\frac{4\Delta}{\hbar^2}\right) \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 .$$

Nehmen Sie an, das System befinde sich zur Zeit $t \leq 0$ im Zustand $|+-\rangle$. Bestimmen Sie dann die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten, das System zu einem späteren Zeitpunkt in einem der Zustände $|++\rangle$, $|+-\rangle$, $|-+\rangle$ und $|--\rangle$ zu finden, indem Sie

(**a**) (2 Punkte) das Problem exakt lösen,

(**b**) (2 Punkte) zeitabhängige Störungstheorie in erster Ordnung benutzen und H als Störung betrachten, die bei $t = 0$ eingeschalten wird. Unter welcher Bedingung liefert b) das richtige Ergebnis?

Aufgabe 28: Zwei-Niveau-System mit zeitabhängigem Potential (2 Punkte)

Betrachten Sie ein Zwei-Niveau-System mit $E_1 < E_2$ mit einem zeitabhängigen Potential

$$V_{1\,1} = V_{2\,2} = 0, \qquad V_{1\,2} = \gamma e^{i\omega t}, \qquad V_{1\,2} = \gamma e^{-i\omega t} \qquad (\gamma \text{ ist rell}).$$

Bei $t = 0$ ist nur das niedrigere Niveau besetzt. Berechnen Sie die Besetzungswahrscheinlichkeiten als Funktion der Zeit, indem Sie die zeitabhängige Störungstheorie zur ersten nicht verschwindenden Ordnung anwenden. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis für kleine Werte von γ mit der exakten Lösung. Betrachten sie dazu die zwei Fälle, dass entweder (**a**) $\omega \sim \omega_{12}$ oder (**b**) $\omega \gg \omega_{12}$ oder $\omega \ll \omega_{12}$ gilt.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter
http://www.ttp.kit.edu/∼spinrath/theoe.htm