

Übungen zur Theoretischen Physik E (QM II)

Prof. Dr. U. Nierste, Dr. M. Spinrath, Institut für Theoretische Teilchenphysik

WS 2013/2014

Blatt 14

Abgabe: 07.02.14 (12:00 Uhr)

Name:

Tutor:

Matrikelnummer:

Übungsgruppe:

Aufgabe 29: Klein-Gordon-Gleichung (2 Punkte)

(a) (1 Punkt) Sei $\phi(x)$ Lösung der freien Klein-Gordongleichung

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 .$$

Zeigen Sie, dass

$$j^\mu = i [(\partial^\mu \phi^*)\phi - \phi^*(\partial^\mu \phi)]$$

ein erhaltener Strom ist, d.h. zeigen Sie

$$\partial_\mu j^\mu = 0.$$

(b) (1 Punkt) Sei $\phi(x)$ Lösung der Klein-Gordon-Gleichung im elektromagnetischen Feld:

$$[(\partial_\mu + i e A_\mu)(\partial^\mu + i e A^\mu) + m^2] \phi = 0 .$$

eines spinlosen Teilchens der Ladung e . Zeigen Sie, dass ϕ^* ein Teilchen der Ladung $-e$ beschreibt.

Aufgabe 30: Kleinsches Paradoxon (8 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron mit Spin aufwärts und positiver Energie, dass in z -Richtung gegen eine Potentialwand

$$V(\vec{x}) = \begin{cases} 0 & \text{für } z \leq 0 \\ V_0 & \text{für } z > 0 \end{cases}$$

läuft.

- (a) (2 Punkte) Geben Sie die Wellenfunktion des einlaufenden Elektrons an.
- (b) (1 Punkt) Geben Sie die allgemeinen Lösungen positiver Energie für die reflektierte Wellenfunktion an.
- (c) (1 Punkt) Geben Sie die allgemeinen Lösungen positiver Energie für die transmittierte Wellenfunktion an.
- (d) (1 Punkt) Bestimmen Sie aus der Stetigkeit die reflektierte und die transmittierte Wellenfunktion. Ändert sich der Spin an der Potentialschwelle?
- (e) (2 Punkte) Berechnen Sie die z -Komponente des Stroms

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (\text{wobei } \bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0)$$

für die einfallende Welle (j_{ein}^z), die transmittierte Welle (j_{trans}^z) und die reflektierte Welle (j_{ref}^z) und bilden Sie die Verhältnisse $\frac{j_{\text{trans}}^z}{j_{\text{ein}}^z}$ und $\frac{j_{\text{ref}}^z}{j_{\text{ein}}^z}$.

- (f) (1 Punkt) Interpretieren Sie das Ergebnis von Teilaufgabe (e). Betrachten Sie dabei auch den Fall $V_0 > E + mc^2$.

Bonusaufgabe 31: Drei identische Teilchen (3 Bonuspunkte)

Ein System bestehe aus drei identischen Teilchen mit Hamilton-Operator $H = h_0(1) + h_0(2) + h_0(3)$. Hierbei hat der Hamilton-Operator eines Teilchens $h_0(n)$, $n \in \{1, 2, 3\}$ drei Energieeigenwerte $0, \hbar\omega, 2\hbar\omega$, die jeweils $2s + 1$ -fach entartet sind (s ist der Spin des Teilchens und $\omega > 0$).

- (a) (1.5 Punkte) Geben Sie für ein System aus drei Elektronen die Energieniveaus von H und ihre Entartungen an.
- (b) (1.5 Punkte) Geben Sie für ein System aus drei Bosonen mit Spin $s = 0$ die Energieniveaus von H und ihre Entartungen an.

Bonusaufgabe 32: Die Riemannsche ζ -Funktion (2 Bonuspunkte)

Die Riemannsche ζ -Funktion ist definiert als

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}.$$

In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$. Differenzieren Sie dazu die geometrische Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x} \quad (\text{für } x < 1)$$

an der Stelle $x = -1$ und vergleichen sie das Resultat mit $(1 - 2 \cdot 2^{-s})\zeta(s)$ an der Stelle $s = -1$.

NB: Der Beweis, der hier skizziert wird, ist streng genommen nicht ganz korrekt, da die Dirichlet-Reihendarstellung der Riemannschen ζ -Funktion nur für $\Re(s) > 1$ gilt. Wir leiten hier aber her, dass $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \eta(s)$ gilt, wobei $\eta(s)$ die Dirichlet η -Funktion ist. Die Verbindung zwischen diesen beiden Funktionen kann aber analytisch für komplexe s fortgesetzt werden und man erhält dann immer noch $\zeta(-1) = -\frac{1}{12}$ (auch auf vielen anderen Wegen).

Anmerkungen

Dies ist das letzte Übungsblatt. Bitte, bedenken Sie bei der Bearbeitung, dass Sie insgesamt in den Übungen 50% der Punkte erreichen und einmal vorgerechnet haben müssen, um die Vorleistung 1 zu erhalten.

Die erste Klausur wird am 13. März im Gerthsen, Daimler und Benz HS von 10-12 Uhr stattfinden. Als Hilfsmittel ist nur ein beidseitig beschriebenes DIN-A4-Blatt zugelassen. Bringen Sie bitte auch einen amtlichen Lichtbildausweis und ihren Studierendenausweis mit. Beachten Sie auch, dass sie einen dokumentenechten Stift benutzen sollen (Füller oder Kugelschreiber, kein Bleistift, keine rote Tinte). Weitere Details werden zu gegebener Zeit auf der Vorlesungswebseite bekannt gegeben.

Hinweis: Die Übungsblätter erhalten Sie auch im Internet unter

<http://www.ttp.kit.edu/~spinrath/theoe.htm>