

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
<http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516>

WS 15/16 – Blatt 01
Abgabe: 26.10.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 27.10.2015

Aufgabe 1

Berechnen Sie die minimale kinetische Energie eines Positronenstrahls (in GeV), sodass die Reaktion $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ mit ruhenden Elektronen möglich ist ($m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$, $m_\pi = 140 \text{ MeV}/c^2$, $1 \text{ GeV} = 10^3 \text{ MeV} = 10^9 \text{ eV}$, c ist die Lichtgeschwindigkeit).

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Mit Hilfe der dimensionslosen Variablen $\rho = kr$, $\hbar^2 k^2 = 2mE$, lautet die radiale Schrödingergleichung für ein freies Teilchen

$$T_l \xi(\rho) = \left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1 \right) \xi(\rho) = 0. \quad (1)$$

Ihre Lösungen lauten

$$j_l = (-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right), \quad n_l = -(-\rho)^l \left(\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \right)^l \left(\frac{\cos \rho}{\rho} \right). \quad (2)$$

- (i) Zeigen Sie, dass Gleichung (1) aus der stationären Schrödingergleichung mit dem Ansatz $\psi(\vec{r}) = R(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ folgt.
 - (ii) Prüfen Sie nach, dass die Funktionen (2) tatsächlich die Gleichung (1) lösen.
(Hinweis: Benutzen Sie vollständige Induktion. Versuchen Sie dazu einen Faktor $(\rho^{-1}d/d\rho)$ nach links durchzukommutieren, und auf den Ausdruck $((l-1)/\rho - d/d\rho)T_{l-1}j_{l-1}$ zu kommen.)
 - (iii) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionen j_l und n_l für sehr kleine und sehr große Werte von ρ .
-

Aufgabe 3* (5 Punkte)

Eine ebene Welle lässt sich in die Lösungen der freien Schrödingergleichung in Kugelkoordinaten zerlegen. Sei das Koordinatensystem so gewählt, dass der Wellenvektor in z -Richtung zeigt und seien die Legendrepolynome durch P_l bezeichnet. Seien ferner j_l und n_l definiert wie in Aufgabe 2. Dann gilt die Relation

$$e^{ik \cdot z} = e^{ikr \cos \theta} = \sum_l c_l j_l(kr) P_l(\cos \theta). \quad (3)$$

- (i) Warum tauchen die Funktionen n_l in der Summe nicht auf?
 - (ii) Bestimmen Sie die c_l . (Hinweis: Projizieren Sie die Produkte $c_l j_l(kr)$ mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation der Legendrepolynome aus der Summe. Bestimmen Sie dann c_l , indem Sie das asymptotische Verhalten der Gleichung untersuchen).
-