Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
`http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516`

WS 15/16 – Blatt 02
Abgabe: 02.11.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 03.11.2015

Aufgabe 1* (4 Punkte)

Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$(\Delta + k^2)\left(-\frac{e^{\pm ikr}}{4\pi r}\right) = \delta(\vec{r}) \ .$$

Da der Differentialoperator bei $r = 0$ nicht wohldefiniert ist, soll folgendermaßen vorgegangen werden: Ersetzen Sie $1/r$ durch eine Funktion $g_\varepsilon(r)$ mit

- für $r \geq \varepsilon$: $g_\varepsilon(r)$=1/r,
- für $r < \varepsilon$: $g_\varepsilon(r) \to 0$ für $r \to 0$ und
- $g_\varepsilon(r)$ ist hinreichend of stetig differenzierbar.

Zeigen Sie dann, dass für jede Testfunktion f folgt $\lim_{\varepsilon\to 0} \int d^3r f(\vec{r})(\Delta + k^2)(-e^{\pm ikr} g_\varepsilon(r)/4\pi) = f(\vec{0})$.

Aufgbe 2* (6 Punkte)

Zeigen Sie für Vorwärtsstreuung ($\theta = 0$), dass der ungestreute Anteil der Welle mit der gestreuten Welle destruktiv interferiert. Gehen Sie folgendermaßen vor:

(i) Berechnen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom für die Überlagerung von gestreuter und ungestreuter Welle. Begründen Sie, warum Terme $\propto r^{-2}, r^{-3}$ vernachlässigt werden können.

(ii) Betrachten wir nun den Gesamtfluss durch eine Kugeloberfläche vom Radius r. Geben Sie einen Grund an, warum der Interferenzterm nur in Vorwärtsrichtung beiträgt und berechnen Sie diesen Beitrag. (Hinweis: Prinzip der konstanten Phase, auch bekannt als Lemma von Riemann-Lebesgue)

(iii) Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung eine Beziehung zwischen dem gestreuten Anteil und dem Interferenzterm her, und zeigen Sie damit, dass der Beitrag des Interferenzterms negativ ist.

(iv) Leiten Sie daraus das optische Theorem

$$\sigma_{\rm tot} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\, f(\theta = 0, \phi)$$

her.

Aufgabe 3

Es soll das Streuproblem in darstellungsfreier Form gelöst werden. Wir schreiben den Hamiltonoperator als Summe $H = H_0 + V$ wobei V das Potential bezeichnet.

(i) Überprüfen Sie, dass

$$|\psi\rangle = |\psi_{\mathrm{ein}}\rangle + \frac{1}{E - H_0} V |\psi\rangle$$

eine formale Lösung angibt. Überzeugen Sie sich, dass der inverse Operator nicht überall wohldefiniert ist, und korrigieren Sie ihn über eine $i\varepsilon$-Vorschrift, so dass er eine kausale Lösung beschreibt.

(ii) Welcher Operator entspricht der Geenschen Funktion?

(iii) Ermitteln Sie einen darstellungsfreien Ausdruck für die Streuamplitude.

(iv) Bestimmen Sie nun den Operator Ω, der die einlaufende in die auslaufende Welle transformiert:

$$|\psi\rangle = \Omega |\psi_{\mathrm{ein}}\rangle \tag{1}$$

(v) Geben Sie damit formal eine explizite Lösung für den Operator $T := V\Omega$ an (beachten Sie, dass Operatoren i. Allg. nicht-kommutativ sind).

(vi) Leiten Sie die Bornsche Reihen her, indem Sie den expliziten Ausdruck für T formal für "$H_0 \gg V$" entwickeln. Überprüfen Sie ihre Darstellung, indem Sie die ersten drei Terme der Reihe in die Ortsdarstellung projizieren, und mit den Ausdrücken aus der Vorlesung vergleichen.