Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
`http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516`

WS 15/16 – Blatt 03
Abgabe: 09.11.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 10.11.2015

Aufgabe 1* (5 Punkte)

Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \phi)$ in Bornscher Näherung, sowie daraus folgend den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\sigma/d\Omega$ und den totalen Wirkungsquerschnitt σ_{tot} für

(i) das Stufenpotential

$$V(\vec{r}) = \begin{cases} V_0 & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } r > R \end{cases}$$

(ii) und das Yukawa-Potential

$$V(\vec{r}) = a\frac{e^{-\mu r}}{r} \ .$$

Es gilt jeweils $r := |\vec{r}|$. Wie verhält sich $f(\theta, \phi)$ in (i) für kleine Energien, bzw. kleine Streuwinkel? Was bedeutet dies für das Studium von Kräften dieser Art (z.B. Bestimmung von V_0 und R) mittels Streuexperimenten?

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Zeigen Sie,

(i) dass für die Bornsche Reihe bis zum zwiten Term gilt

$$f^{(2)} = f^{(1)} + \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\int d^3y\, d^3x\, e^{i(-\vec{q}\cdot\vec{y}-\vec{k}\cdot\vec{x})}V(\vec{y})\frac{e^{i|\vec{k}|\cdot|\vec{x}|}}{x}V(\vec{y}-\vec{x}) \ ,$$

wobei $x = |\vec{x}|$ und $f^{(1)}$ die Streuamplitude in Bornscher Näherung bezeichnen und $\vec{q} = \vec{k}\,' - \vec{k}$ der Impulsübertrag der gestreuten Teilchen ist.

(ii) Zeigen Sie ferner, dass das optische Theorem näherungsweise in der Form

$$\sigma_{\text{tot}} = \int d\Omega\, |f^{(1)}(\theta, \phi)|^2 = \frac{4\pi}{k}\text{Im}\, f^{(2)}(0)$$

erfüllt ist.

Aufgabe 3

Es soll aus der Messung eines Wirkungsquerschnitts für Elektronstreuung an einem Atomkern die Ladungsverteilung im Kern rekonstruiert werden. Das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist bekanntlich gegeben durch

$$V(\vec{r}) = -e \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \ .$$

(i) Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung über den Rutherford-Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_R$ und einen Formfaktor $F(\vec{q})$ ausgedrückt werden kann, sodass gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R F(\vec{q})^2 \ ,$$

wobei $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}\,'$ der Impulsübertrag ist. Berechnen Sie $F(\vec{q})$.

(ii) Wie vereinfacht sich dieser Ausdruck im kugelsymmetrischen Fall, d.h. für $\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|)$?

(iii) Der Fit an eine Messreihe für Elektronstreuung am Proton ergebe

$$F(\vec{q}) = F(q) \approx \frac{1}{(1 + q^2/a^2)^2}, \quad a = 4.3\,\mathrm{fm}^{-1} \ .$$

Welche Ladungsverteilung folgt daraus? Wie groß ist der mittlere quadratische Radius $\langle r^2 \rangle$? Welcher Radius ergibt sich daraus ungefähr für das Proton?