

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
<http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516>

WS 15/16 – Blatt 04
Abgabe: 16.11.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 17.11.2015

Aufgabe 1* (5 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens an einer unendlich harten Kugel ($V = \infty$ für $r < R$, $V = 0$ sonst).

- (i) Bestimmen Sie die Streuphasen δ_0 , δ_1 , δ_2 , sowie ihr Verhalten für kleine Werte von $\rho = kR$.
- (ii) Sei nun $\rho = 1$. Wenn Sie in (i) keinen Fehler gemacht haben, erhalten Sie $\delta_1 = -0.215$, $\delta_2 = -0.0172$. Berechnen Sie die Winkelverteilung der Streuung (d.h. geben Sie $d\sigma/d\Omega$ als Funktion von $\cos\theta$ an) und machen Sie eine Skizze. Berechnen Sie die Beiträge dieser Wellen zum totalen Wirkungsquerschnitt.
- (iii) Es gilt ferner $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \xi_l(\rho)$ mit $\xi_l(\rho) = j_l^2(\rho)/(j_l^2(\rho) + n_l^2(\rho))$. Geben Sie die Grenzen von ξ_l für kleine und große Werte von ρ an. Überprüfen Sie hiermit Aufgabe (i).

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Der Radialanteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms $\Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ ist gegeben durch:

$$R_{nl}(r) = - \left(\frac{2}{a_0} \right)^{3/2} \frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2[(n+l)!]^3}} F_{nl} \left(\frac{2r}{na_0} \right), \quad \text{mit} \quad F_{nl}(\rho) = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho).$$

$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ ist der Bohrsche Radius. Dabei lauten für $p, k \in \mathbb{N}$ die Laguerre-Polynome

$$L_p^k(\rho) = \frac{d^k}{d\rho^k} \left[e^\rho \frac{d^p}{d\rho^p} (\rho^p e^{-\rho}) \right]$$

und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{(p-k)!}{(p!)^3} \int_0^\infty d\rho \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_q^k(\rho) = \delta_{pq}.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren $1/r$, $1/r^2$ und $1/r^3$ für die gebundenen Energieeigenzustände.

Aufgabe 3

Betrachten Sie ein System aus einem Bahndrehimpuls $\vec{L}$ mit den Quantenzahlen $l \in \mathbb{N}, m_l = -l, \dots, l$ und einem Spin $\vec{S}$ mit $s = 1/2, m_s = -1/2, 1/2$. Die Eigenzustände seien wie üblich bezeichnet mit $|l, m_l\rangle$, bzw. $|s, m_s\rangle$. Es soll nun für den Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ die gemeinsame Eigenbasis der Operatoren $\vec{J}^2$ und J_z als Linearkombination der Produktzustände

$$|l, m_l; s, m_s\rangle = |l, m_l\rangle |s, m_s\rangle$$

bestimmt werden. Die Eigenbasis des Gesamtdrehimpulsoperators sei bezeichnet mit $|j, m_j; l, s\rangle$.

- (i) Bestimmen Sie zunächst die möglichen Werte der Drehimpulsquantenzahlen j, m_j des Gesamtdrehimpulses.
- (ii) Geben Sie einen Zustand $|l, m_l; s, m_s\rangle$ an, der nicht Eigenzustand von J_z ist. Begründen Sie, warum allgemein die Formel

$$|j, m_j; l, s\rangle = \sum_{m_l, m_s} c(l, m_l, s, m_s, j, m_j) |l, m_l; s, m_s\rangle$$

für $j = l \pm s$ gilt und zeigen Sie, dass die Clebsch-Gordan-Koeffizienten c gegeben sind durch

$$c(l, m_l, s, m_s, j, m_j) = \langle j, m_j; l, s | l, m_l; s, m_s \rangle .$$

- (iii) Berechnen Sie die Koeffizienten im Fall $l \in \mathbb{N}$ und $s = 1/2$. Beginnen Sie mit dem Zustand mit $j = m_j$ und wenden Sie sukzessive den Absteigeoperator mit

$$J_- |j, m_j; l, s\rangle = \hbar \sqrt{j(j+1) - m_j(m_j-1)} |j, m_j-1; l, s\rangle$$

an.
