

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
<http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516>

WS 15/16 – Blatt 05
Abgabe: 23.11.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 24.11.2015

Aufgabe 1* (6 Punkte)

Wir betrachten ein Elektron im Potential eines isotropen harmonischen Oszillators. Unter Vernachlässigung des Spins ergibt sich der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2.$$

Aus der QM I ist bekannt, dass sich ein solches System beschreiben lässt als Produkt dreier harmonischer Oszillatoren mit gleicher Frequenz. Die Leiteroperatoren seien mit a_x, a_y, a_z bezeichnet. Der Übergang zu Kugelkoordinaten Fall lässt sich nun in der Operatorsprache vollziehen. Definiere dazu

$$a_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y), \quad a_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y),$$

sowie die zugehörigen Operatoren $N_g = a_g^\dagger a_g, N_d = a_d^\dagger a_d, N_z = a_z^\dagger a_z$ und Drehimpulsoperatoren

$$\begin{aligned} L_z &= \hbar(N_d - N_g), \\ L_+ &= L_x + iL_y = \hbar\sqrt{2}(a_z^\dagger a_g - a_d^\dagger a_z), \\ L_- &= L_x - iL_y = \hbar\sqrt{2}(a_g^\dagger a_z - a_z^\dagger a_d). \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass L_x, L_y, L_z eine Drehimpulsalgebra bilden, und dass

$$|n_d, n_g, n_z\rangle := (n_d!n_g!n_z!)^{-1/2}(a_d^\dagger)^{n_d}(a_g^\dagger)^{n_g}(a_z^\dagger)^{n_z}|0, 0, 0\rangle$$

Eigenzustände zu H und L_z sind. Wie lauten die dazugehörigen Eigenwerte?

(ii) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem sukzessive die gemeinsamen Eigenzustände zu $\vec{L}^2$ und L_z durch die Zustände $|n_d, n_g, n_z\rangle$ ausgedrückt werden können. Starten Sie dabei jeweils mit $|n_d, 0, 0\rangle$. Damit können im Folgenden die Eigenzustände mit Hilfe von $n = n_x + n_y + n_z, l, m_l$ klassifiziert werden. Eine explizite Berechnung der Basistransformation ist nicht nötig.

Setzen Sie im Folgenden die Kenntnis dieses Basiswechsels voraus, und behandeln Sie (iii)-(v) in der gemeinsamen Eigenbasis von $\vec{L}^2$ und L_z .

- (iii) Welche Form nimmt hier der Darwin-Term an? Berechnen Sie die führende Energie-Korrektur. Ist diese „klein“?
 - (iv) Betrachten wir nun auch den Spin des Elektrons. Welche Form ergibt sich für den Term des Hamiltonoperators, der die Spin-Bahn-Kopplung beschreibt? (Gehen Sie analog zum Potential eines Atomkerns vor). Bestimmen Sie auch hier die führende Energiekorrektur.
 - (v) Welche Wechselwirkungsterme müssen im Fall eines externen Magnetfeldes beachtet werden? Welche Form haben die Beiträge zum Hamiltonoperator? Welche Matrixelemente müssen in erster Ordnung Störungstheorie berechnet werden?
-

Aufgabe 2* (4 Punkte)

Positronium ist ein Atom, das aus einem Elektron e^- und seinem Antiteilchen, dem Positron e^+ besteht. Betrachten Sie ein solches Atom im Grundzustand, welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B}$ parallel zur z-Achse befindet. Der Hamilton-Operator kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{HF} + H_Z, \\ H_{HF} &= A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \\ H_Z &= -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet H_0 den Hamilton-Operator des Positroniums, der nur die elektrostatische Wechselwirkung zwischen Elektron und Positron enthält. $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ sind die Spinoperatoren von Elektron bzw. Positron und $\vec{\mu}_1$ und $\vec{\mu}_2$ deren magnetische Momente. $\vec{S}_i$ und $\vec{\mu}_i$ sind durch die gyromagnetischen Verhältnisse γ_1 und γ_2 miteinander verknüpft:

$$\vec{\mu}_i = \gamma_i \vec{S}_i, \quad i = 1, 2.$$

Für das Elektron und das Positron gilt $\gamma_1 = -\gamma_2$. H_{HF} beschreibt die magnetische Wechselwirkung zwischen $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ und H_Z die Kopplung von $\vec{B}$ an die magnetischen Momente.

(a) Berechnen Sie die Matrixelemente des Störoperators $H_{HF} + H_Z$ in der Basis $\{|F, m_F\rangle\}$, wobei F und m_F die Quantenzahlen des Gesamtspins

$$\vec{F} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

sind.

(b) Bestimmen Sie die Aufspaltung des 1S-Grundzustands in erster Ordnung Störungstheorie.

(c) Stellen Sie graphisch die Energieaufspaltung als Funktion des Magnetfelds B dar.

Aufgabe 3

Ein Spin-3/2-Teilchen sei in einem Zentralpotential $V(r)$ gebunden. Unter Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung lautet der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \xi(r) \vec{L} \cdot \vec{S}.$$

(a) Betrachten Sie den $\vec{L} \cdot \vec{S}$ -Term nach Störungsrechnung erster Ordnung. In wieviele Niveaus spalten die Zustände zu $l = 0, 1, 2$ auf?

(b) Berechnen Sie die relative Aufspaltung innerhalb der Multipletts zu festen l und skizzieren die Energieniveaus.