Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516

WS 15/16 – Blatt 06
Abgabe: 30.11.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 1.12.2015

Aufgabe 1* (6 Punkte)

Betrachten Sie ein Elektron in einem p-Zustand, welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e_z}$ befindet, wobei der Hamilton-Operator die Gestalt

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_Z + H_{LS}\,, \\ H_Z &= \omega_0(L_z + 2S_z)\,, \\ H_{LS} &= \lambda \vec{L}\cdot\vec{S}\,, \end{aligned}$$

haben soll. Dabei ist H_0 der Hamilton-Operator des Wasserstoffatoms, H_Z beschreibt den Einfluss des Magnetfeldes und H_{LS} ist die Spin-Bahnkopplung. (Die Ortsabhängigkeit sowie die restlichen relativisatischen Korrekturen sollen der Einfachheit halber vernachlässigt werden).

(a) Zeigen Sie, dass H aus dem Entartungsraum der p-Zustände von H_0 nicht herausführt, d. h. dass $[H, \vec{L}^{\,2}] = 0$.

(b) Betrachten Sie H_{LS} als Störung zu $H_0 + H_Z$ und geben Sie für das ungestörte Problem die Energieeigenwerte sowie deren Entartungen an.

(c) Berechnen Sie die Matrixelemente des Störoperators H_{LS} in der Basis $\{|l, m_l, s, m_s\rangle\}$. Dazu ist es günstig, die Operatoren $L_\pm$ und $S_\pm$ einzuführen.

(d) Betrachten Sie zunächst die nichtentarteten Zustände und bestimmen Sie im Rahmen der Störungstheorie erster Ordnung die neuen Energien und Eigenfunktionen.

(e) Untersuchen Sie jetzt störungstheoretisch den Einfluss des Spin-Bahnkopplung auf die entarteten Zustände. Berechnen Sie die Energien in erster Ordnung in λ und die neuen Eigenfunktionen in nullter Ordnung.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

Betrachten Sie ein relativistisches, geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.

(a) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion

$$L = -mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\Phi(\vec{r},t) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\,, \quad \beta^2 = \vec{v}^{\,2}/c^2\,.$$

$\vec{A}$ ist das Vektorpotential und Φ ist das skalare Potential.

(b) Sei

$$K^0 = \frac{1}{c}\frac{\vec{F_L}\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad K^i = \frac{F_L^i}{\sqrt{1-\beta^2}}\,.$$

Zeigen Sie, dass für diese kovariante Formulierung der Lorentz-Kraft gilt

$$K^\mu = qF^{\mu\nu}\frac{p_\nu}{m}$$

wobei p_ν der Viererimpuls des Teilchens ist. Die Lorentz-Kraft $\vec{F_L}$ ist, wie in der klassischen Mechanik, gegeben durch $\vec{F_L} = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ das elektrische bzw. magnetische Feld bezeichnet.

(c) Stellen Sie die kovariante Form der Bewegungsgleichung auf.

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, *d.h.* dass gilt

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad = \quad \det(\Lambda)\, \Lambda^{\alpha}_{\ \alpha'}\, \Lambda^{\beta}_{\ \beta'}\, \Lambda^{\gamma}_{\ \gamma'}\, \Lambda^{\delta}_{\ \delta'}\ \varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

(b) Zeigen Sie nun, dass $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$, wobei $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.