Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
`http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516`

WS 15/16 – Blatt 07
Abgabe: 7.12.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 8.12.2015

Aufgabe 1

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.
(a) Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?
Hinweis: $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ und $\hbar = 6{,}582\,119 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeV\ s}$.
(b) Welcher Masse in Kilogramm entspricht $1\,\mathrm{MeV}$?
Hinweis: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,176 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.
(c) Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140$ MeV) in fm($= 10^{-15}$m) aus.

Aufgabe 2* (6 Punkte)

(a) (i) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her.
Hinweis: Benutzen Sie dazu Ihre Kenntnis der Eichinvarianz der Schrödingergleichung.

(ii) Zeigen Sie, dass Ψ^* ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt, wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (a) ist.

(b) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet.
(i) Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r},t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2 c^2 \triangle + m^2 c^4) u(\vec{r}) \quad = \quad [E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r})\,.$$

(ii) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2+[(l+1/2)^2-(Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.
(iii) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

Aufgabe 3* (4 Punkte)

(i) ψ sei eine Lösung der Diracgleichung. Welcher Gleichung genügt $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$?

(ii) Leiten Sie aus der Definition der Gamma-Matrizen, $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ folgende Eigenschaften der Dirac-Matrizen her:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma_0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k$$
$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma}_5 = -\gamma_5, \quad \overline{\gamma_\mu \gamma_5} = \gamma_\mu \gamma_5,$$

wobei $\gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, und für ein allg. Produkt Γ von Gamma-Matrizen gilt $\bar{\Gamma} := \gamma_0 \Gamma^\dagger \gamma_0$.

(iii) Berechnen Sie $\gamma_\mu \gamma^\mu$, $\gamma_\mu \not{a} \gamma^\mu$,$\gamma_\mu \not{a} \not{b} \gamma^\mu$.