

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
<http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516>

WS 15/16 – Blatt 08
Abgabe: 14.12.2015, 11:00 Uhr
Besprechung: 15.12.2015

Aufgabe 1* (3 Punkte)

Man zeige, dass aus $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ die Definitionsgleichungen und Eigenschaften der Matrizen α_k, β folgen.

Aufgabe 2* (4 Punkte)

(i) Die Gamma-Matrizen haben in der Dirac-Darstellung folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\sigma_i, i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen. Drücken Sie die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

durch die Pauli-Matrizen aus.

(ii) Zeigen Sie, dass aus der Antikommutatorrelation der Gamma-Matrizen folgt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}).$$

(iii) Zeigen Sie, dass gilt

$$\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b, \quad \gamma^\nu \not{a} + \not{a}\gamma^\nu = 2a^\nu, \\ \not{a}\not{b}\not{a} = -a^2\not{b} + 2(a \cdot b)\not{a}$$

wobei a und b Vierervektoren sind und die Notation $\not{a} = a_\mu \gamma^\mu$ verwendet wurde.

Aufgabe 3* (3 Punkte)

D_z sei die dreidimensionale Drehmatrix für die Drehung um den Winkel ϕ um die z -Achse und S_R die entsprechende Drehung der Spinoren.

(i) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix S_R in folgender Form geschrieben werden kann

$$S_R = \cos\left(\frac{\phi}{2}\right) + i\sigma_{12}\sin\left(\frac{\phi}{2}\right).$$

(ii) Zeigen Sie, dass gilt $S_R^{-1} = \gamma^0 S^\dagger \gamma^0$.

(iii) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass gilt $S_R^{-1} \gamma_j S_R = (D_z)_{ji} \gamma_i$.

Aufgabe 4

Betrachten Sie den Dirac-Hamilton-Operator für ein relativistisches Teilchen mit der Masse m , das sich im Zentralpotential $V(r)$ befindet

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(r).$$

Berechnen Sie die Kommutatoren $[H, \vec{L}]$, $[H, \vec{S}]$ und $[H, \vec{L} + \vec{S}]$, wobei $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ der Bahndrehimpuls und

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\Sigma} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}$$

der Spinoperator ist. Betrachten Sie dabei die Dirac-Matrizen $\vec{\alpha}$ und β in der Dirac-Darstellung

Am Dienstag, den 22.12.2015 findet die Probeklausur während den Tutorienzeiten statt. Die Probeklausur muss in dem Tutorium geschrieben werden, zu dem Sie sich am Anfang des Semesters eingetragen haben (siehe auch

<http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516/>).

Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt.

Bringen Sie bitte zur Probeklausur Ihren Studentenausweis mit.