

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. A. Hasselhuhn
<http://www.ttp.kit.edu/~ahassel/TheoE1516>

WS 15/16 – Blatt 09
Abgabe: 11.01.2016, 11:00 Uhr
Besprechung: 12.01.2016

Aufgabe 1

Gegeben seien die Impulsraum-Spinoren $u(p_i)$ und $\bar{u}(p_f)$, die die Dirac-Gleichungen $(\not{p}_i - m)u(p_i) = 0$ bzw. $\bar{u}(p_f)(\not{p}_f - m) = 0$ erfüllen. Zeigen Sie, dass gilt

$$\bar{u}(p_f)\gamma^\mu u(p_i) = \bar{u}(p_f)\left[\frac{(p_i + p_f)^\mu}{2m} + \frac{i\sigma^{\mu\nu}(p_f - p_i)_\nu}{2m}\right]u(p_i),$$

wobei $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$.

Hinweise: (i) Überzeugen Sie sich davon, dass $\gamma^\mu\gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i\sigma^{\mu\nu}$.

(ii) Verwenden Sie die oben angegebenen Dirac-Gleichungen im Impulsraum.

Aufgabe 2* (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass gilt

- (a) $\text{Tr}(\gamma_5) = 0$,
- (b) $\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$,
- (c) $\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\delta) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\delta} - g^{\mu\rho}g^{\nu\delta} + g^{\mu\delta}g^{\nu\rho})$,
- (d) $\text{Tr}(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\delta\gamma_5) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\delta}$.

Hinweis: Verwenden Sie die zyklischen Vertauschbarkeit unter der Spur, d.h. $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$, und die Antikommutator-Relation der γ -Matrizen, $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$.

Aufgabe 3* (7 Punkte)

Die Elektron-Positron-Paarvernichtung in ein Myon-Antimyon-Paar $e^-(p_1)e^+(p_2) \rightarrow \mu^-(k_1)\mu^+(k_2)$ wird durch das folgenden Spinor-Matrixelement beschrieben

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{q^2} \left(\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \right) \left(\bar{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2) \right), \quad \text{mit } q = p_1 + p_2 = k_1 + k_2,$$

wobei p_1, p_2 und k_1, k_2 die Viererimpulse des Elektrons/Positrons bzw. Myons/Antimyons bezeichnen.

(a) Zeigen Sie dass gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2} \sum_{r_1} \sum_{r_2} |\mathcal{M}(s_1, s_2 \rightarrow r_1, r_2)|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{s_1} \frac{1}{2} \sum_{s_2} \sum_{r_1} \sum_{r_2} \frac{e^4}{q^4} \left(\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2) \right) \left(\bar{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2) \bar{v}(k_2)\gamma_\nu u(k_1) \right), \end{aligned}$$

wobei s_1, s_2, r_1, r_2 die Spinquantenzahlen der Teilchen bezeichnen.

(b) Berechnen Sie $\frac{1}{4} \sum_{\text{spins}} |\mathcal{M}(s_1, s_2 \rightarrow r_1, r_2)|^2$. Drücken Sie das Resultat als Funktion der Skalarprodukte $p_1 \cdot p_2, p_1 \cdot k_1, p_2 \cdot k_2, p_1 \cdot k_2, p_2 \cdot k_1$ und Massen der Teilchen aus.

(c) Vernachlässigen Sie nun die Elektron- und Positronmasse und drücken Sie das Resultat von Aufgabenteil (b) als Funktion von der Myonmasse m_μ , seiner Energie und dem Streuwinkel bzgl. der Elektronrichtung im Schwerpunktsystem aus.