Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 2

Abgabe: Fr, 04.11.16
Besprechung: Di, 08.11.16

Beratungstutorium: Do, 11:30-13:00 Uhr, 6/1, erster Termin: 03.11.

Aufgabe 5: Baker-Campbell-Hausdorff–Identität (*1+2+3=6 Punkte*)

Gegeben seien 2 Operatoren A, B mit den Eigenschaften $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$.

(a) Zeigen Sie, dass dann auch $[e^{-B},[A,B]] = 0$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass
$$[e^{-B}, A] = [A,B]e^{-B}\,.$$
Untersuchen Sie dazu die Funktion $f(x) = e^{-xB}Ae^{xB}$. Nach Differenzieren und Integrieren dieser Funktion erhalten Sie eine Identität, die Sie schließlich zur Behauptung führt.

(c) Zeigen Sie mit Hilfe von (a) die Baker-Campbell-Hausdorff–Identität
$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]}\,.$$
Gehen Sie wieder wie in (a) vor, jetzt mit der Funktion $g(x) = e^{x(A+B)}e^{-xA}e^{-xB}$. Zeigen Sie, dass daraus auch folgt
$$e^A e^B = e^B e^A e^{[A,B]}\,.$$

Aufgabe 6: Translationsoperator (*3+1+1=5 Punkte*)

Untersuchen Sie den Translationsoperator
$$\mathcal{T}(\vec{\ell}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\,\vec{p}\cdot\vec{\ell}\right)\,.$$

(a) Zeigen Sie für beliebige Funktionen F und G, die durch eine Potenzreihe darstellbar sind, aufgrund der fundamentalen Vertauschungsrelation zwischen Ort und Impuls die beiden Relationen

$$[x_i, G(\vec{p})] = i\hbar \frac{\partial G(\vec{p})}{\partial p_i} \qquad\qquad [p_i, F(\vec{x})] = -i\hbar \frac{\partial F(\vec{x})}{\partial x_i}\,.$$

(b) Bestimmen Sie damit den Kommutator $[x_i, \mathcal{T}(\vec{\ell})]$.

(c) Wie ändert sich der Erwartungswert $\langle \vec{x} \rangle$ bezüglich eines Zustandes $|\psi\rangle$ mit einer Translation $|\psi'\rangle = \mathcal{T}(\vec{\ell})\,|\psi\rangle$?

Aufgabe 7: Darstellung der Drehimpulsoperatoren in 3 Dimensionen (*2 Punkte*)

Die Generatoren G_i von Rotationen in 3 Dimensionen lassen sich wie folgt schreiben:

$$G_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \qquad G_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad G_z = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass die G_i tatsächlich die Drehimpulsalgebra

$$[G_k, G_l] = i\epsilon_{klm} G_m$$

erfüllen.

Aufgabe 8: Pauli–Matrizen und Drehungen (*2+3+2=7 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass jede unitäre Matrix U mit $\det U = +1$ (unimodular) in zwei Dimensionen (also jedes Element der $SU(2)$) in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad\qquad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

geschrieben werden kann. Darin sind $a, b \in \mathbb{C}$ (Cayley-Klein Parameter).

(b) Eine allgemeine Spin-$\frac{1}{2}$-Drehung kann auch mit Hilfe von Euler-Winkeln als $U(\alpha, \beta, \gamma) = \exp\left(-i\frac{\sigma_3}{2}\alpha\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_2}{2}\beta\right) \exp\left(-i\frac{\sigma_3}{2}\gamma\right)$ parametrisiert werden. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Cayley-Klein-Parametern aus Teil (a) und den Euler–Winkeln (mit Rechnung)?

(c) Ebenso lässt sich eine allgemeine Drehung als $U(\vec{\omega}) = \exp(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}}{2})$ schreiben. Darin beschreiben $\omega = |\vec{\omega}|$ und $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$ den Drehwinkel bzw. die Drehachse und σ_i sind die Pauli-Matrizen. Drücken Sie ω und $\hat{\omega}$ durch die Euler-Winkel aus Teil (b) aus. Testen Sie in Ihrem Ergebnis auch, ob $\hat{\omega}^2 = 1$.