Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 3

Abgabe: Fr, 11.11.16
Besprechung: Di, 15.11.16

Aufgabe 9: Kohärente Zustände (*4+2=6 Punkte*)

Ein kohärenter Zustand des eindimensionalen harmonischen Oszillators (s. Aufgabe 1) ist als Eigenzustand des Vernichtungsoperators a definiert:

$$a\,|\varphi\rangle = \varphi\,|\varphi\rangle \ .$$

(a) Konstruieren Sie einen normierten kohärenten Zustand $|\varphi\rangle$ explizit als Linearkombination von Energieeigenzuständen, indem Sie ihn aus dem Grundzustand $|0\rangle$ aufbauen. Der Eigenwert φ bleibt zunächst unbestimmt.
Gelingt diese Konstruktion auch für $a^\dagger$?

(b) Zeigen Sie, dass der Translationsoperator aus Aufgabe 6 aus dem Grundzustand einen kohärenten Zustand erzeugt. Welche Rolle spielt nun der Eigenwert φ?

Aufgabe 10: Baker-Campbell-Hausdorff–Identität – Teil 2 (*3 Punkte*)

In dieser Aufgabe betrachten wir eine allgemeinere Form der Baker-Campbell-Hausdorff–Identität.
Zeigen Sie, dass für 2 Operatoren A, B gilt

$$e^B A e^{-B} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A_n \qquad \text{mit} \quad A_n = [B, A_{n-1}] \quad \text{und} \quad A_0 = A\,.$$

Benutzen Sie dazu die Taylorentwicklung von $f(x) = e^{xB} A e^{-xB}$.

Aufgabe 11: SU(2) und SO(3) (*1+2+1=4 Punkte*)

(a) Zeigen Sie, dass jede hermitesche, spurlose 2×2–Matrix P als $P = \vec{p} \cdot \vec{\sigma}$ geschrieben werden kann. Darin sind σ_i die Pauli–Matrizen und $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$.

(b) Solch eine Matrix werde nun mit einer unitären Matrix $U \in SU(2)$ transformiert, $P' = U^{-1} P U$. Zeigen Sie, dass $P' = \vec{p}\,' \cdot \vec{\sigma}$ mit $\vec{p}\,' \in \mathbb{R}^3$ und berechnen Sie $\det P$ sowie $\det P'$. Begründen Sie aus Ihren Ergebnissen, dass sich $\vec{p}$ wie ein dreidimensionaler Vektor unter Drehungen transformiert.

(c) Wenn nun also U für $\vec{p}$ eine "gewöhnliche" Drehung R induziert, also $p'_i = R_{ij} p_j$, dann sollte es einen Zusammenhang zwischen R und U geben. Drücken Sie die Matrixelemente R_{ij} mit Hilfe der Pauli–Matrizen durch U aus. Ist diese Zuordnung eindeutig?

Aufgabe 12: Drehoperatoren (*3+4=7 Punkte*)

Wir betrachten allgemeine Drehungen um die Achse $\vec{\omega}$ mit dem Drehwinkel $\omega = |\vec{\omega}|$,

$$R(\vec{\omega})_{ij} = \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} + \cos\omega \left(\delta_{ij} - \frac{\omega_i \omega_j}{\omega^2} \right) - \frac{\sin\omega}{\omega} \varepsilon_{ijk} \omega_k \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass $R(\vec{\omega}) R(-\vec{\omega}) = \mathbb{1}$.

(b) Zeigen Sie, dass sich der Ortsoperator $\vec{r}$ unter einer unitären Transformation

$$U(\vec{\omega}) = e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{\omega} \cdot \vec{L}} \,, \qquad \vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

unabhängig von der Darstellung bezüglich seiner Komponenten wie ein Vektor transformiert, also

$$U^\dagger(\vec{\omega})\, \vec{r}\, U(\vec{\omega}) = R(\vec{\omega})\, \vec{r} \,.$$

Verwenden Sie dazu das Ergebnis von Aufgabe 10.