Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 25.11.16
Besprechung: Di, 29.11.16

Aufgabe 16: Verzweigungsverhältnisse $\Delta^+ \to N\pi$ (*3+2=5 Punkte*)

Δ-Teilchen sind Baryonen, die wie die Nukleonen (Proton und Neutron) durch ihre Zusammensetzung aus u und d Quarks charakterisiert werden. Die wichtigste Quantenzahl für die Charakterisierung und Unterscheidung von Nukleonen ist der Isospin $\vec{I}$, welchen die starken Wechselwirkung H_s unverändert lässt, also $[H_\mathrm{s}, \vec{I}] = 0$. Darin ist H_s der Hamiltonoperator der starken Wechselwirkung, ein $I = 0$ Tensoroperator (isoskalar).
Die Isospinoperatoren haben dieselben Eigenschaften wie Drehimpulsoperatoren, genügen also den Drehimpulsvertauschungsrelationen $[I_i, I_j] = i\epsilon_{ijk} I_k$ und Eigenzustände lassen sich charakterisieren durch $|I, I_z\rangle$.
Die Δ-Baryonen sind Teilchen im $I = \frac{3}{2}$-Quartett,

$$\left|\Delta^{++}\right\rangle = \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{3}{2}\right\rangle \,, \qquad \left|\Delta^{+}\right\rangle = \left|\tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \,, \qquad \left|\Delta^{0}\right\rangle = \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \,, \qquad \left|\Delta^{-}\right\rangle = \left|\tfrac{3}{2}, -\tfrac{3}{2}\right\rangle \,.$$

Das Δ^+ zerfällt praktisch zu 100% in ein Nukleon (Proton p oder Neutron n, Isospin $I = \frac{1}{2}$) und ein Pion (das leichteste Meson, $I = 1$). Es gilt im Detail

$$\left|\pi^{\pm}\right\rangle = |1, \pm 1\rangle \,, \qquad \left|\pi^{0}\right\rangle = |1, 0\rangle \,, \qquad |p\rangle = \left|\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right\rangle \,, \qquad |n\rangle = \left|\tfrac{1}{2}, -\tfrac{1}{2}\right\rangle \,.$$

(a) Aufgrund der Ladungserhaltung sind für das Δ^+ nur die beiden Zerfallskanäle

$$\Delta^+ \to p\pi^0 \qquad \text{und} \qquad \Delta^+ \to n\pi^+$$

möglich. Berechnen Sie aufgrund der gegeben Analogie zur Drehimpulskopplung, in welchem Verhältnis die beiden Zerfälle auftauchen.

(b) Welche Zerfälle erwarten Sie für das Δ^0? In welchem Verhältnis sollten diese auftreten?

Hinweis:
Die Zerfallswahrscheinlichkeit wird aus der Übergangsamplitude $\langle N\pi|\, H_\mathrm{s}\, |\Delta\rangle$ berechnet.

Aufgabe 17: Drehimpuls als Tensoroperator (*4+2+2=8 Punkte*)

Wir betrachten den Drehimpulsoperator J_q mit den Komponenten

$$J_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y) = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} J_\pm \,, \qquad\qquad J_0 = J_z \,.$$

(a) Die Wigner-Matrizen $d^j_{m'm}(\beta)$ lassen sich für beliebiges j sukzessiv aus den in der Vorlesung gegebenen $d^{1/2}_{m'm}(\beta)$ und den Clebsch-Gordan-Koeffizienten (CGKs) berechnen,

$$d^j_{m'm} = \sum_{m_1,m_2,m_1',m_2'} d^{j_1}_{m_1' m_1} d^{j_2}_{m_2' m_2} \langle j_1 j_2; jm|m_1 m_2\rangle \langle j_1 j_2; jm'|m_1' m_2'\rangle \;.$$

Bestimmen Sie so die gesamte Wigner Matrix für $j=1$ aus der Matrix für $j=\frac{1}{2}$ und den dazugehörigen CGKs. Nutzen Sie dazu auch die folgende Relation für die Elemente der Wigner-Matrizen,

$$d^j_{m'm} = (-1)^{m'-m} d^j_{mm'} = d^j_{-m\,-m'} \,.$$

(b) Berechnen Sie die reduzierten Matrixelemente $\langle \alpha' j' || J_q || \alpha j\rangle$.
Hinweis: $\langle j1; m_1 = j, m_2 = 0 | j1; j, m = j\rangle = \sqrt{j/(j+1)}$.

(c) Berechnen Sie $J_q' = d^1_{qp} J_p$ mit Hilfe der Wigner-Matrix aus Teil (a). Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Erwartung für eine Drehung der Komponenten J_x, J_y, J_z um den Winkel β um die y-Achse übereinstimmt.

Aufgabe 18: Sphärische Tensoren und Kugelflächenfunktionen (*4+3=7 Punkte*)

(a) Schreiben sie xy, xz und $(x^2 - y^2)$ als Komponenten eines irreduziblen sphärischen Tensoroperators vom Rang 2.
Hinweis: Die Kugelflächenfunktionen Y_ℓ^m sind irreduzible sphärische Tensoroperatoren vom Rang ℓ. Schreiben Sie die in Frage kommenden Y_ℓ^m in kartesischen Koordinaten.

(b) Das Quadrupolmoment lässt sich als Erwartungswert

$$Q = e\,\langle \alpha, j, m = j |\, 3z^2 - r^2 \,| \alpha, j, m = j\rangle$$

schreiben. Drücken Sie das Matrixelement

$$M = e\,\langle \alpha, j, m' |\, x^2 - y^2 \,| \alpha, j, m = j\rangle$$

(mit $m' = j, j-1, \ldots$) durch Q und geeignete Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus.