Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 7

Abgabe: Fr, 09.12.16
Besprechung: Di, 13.12.16

Aufgabe 21: Zeeman-Effekt (*8+2+2=12 Punkte*)

Betrachten Sie nochmals den schon aus der Vorlesung bekannten Zeeman-Effekt eines wasserstoff-artigen Atoms in einem Magnetfeld $\vec{B} = B\vec{e}_z$ mit den Hamilton-Funktionen

$$\begin{aligned} H_0 &= \frac{\vec{p}}{2m_e} + V_C(\vec{r})\,, \\ H_{LS} &= \frac{1}{2m_e^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}r}\vec{L}\cdot\vec{S}\,, \\ H_B &= \frac{eB}{2m_e}\left(L_z + 2S_z\right)\,. \end{aligned}$$

Nun wollen wir aber den allgemeinen Fall behandeln, in dem das Magnetfeld beliebig groß sein kann und deswegen keine Aussage über die relative Stärke von H_{LS} und H_B getroffen werden kann. Dazu betrachten wir die Summe der beiden, $H_{LS} + H_B$, als Störterm zu H_0.

(a) Berechnen Sie die Energiekorrekturen zu den beiden entarteten Zuständen $\left|n, j = \ell \pm \frac{1}{2}, m, \ell\right\rangle$.
Lösung: $\Delta E_\pm = \Delta_{LS,-} + \mu_B B m + \frac{\Delta}{2} \pm \sqrt{\frac{\Delta^2}{4} + \Delta\mu_B B\frac{m}{2\ell+1} + \frac{1}{4}(\mu_B B)^2}$
mit $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$, $\Delta_{LS,\pm} = \left\langle n, j = \ell \pm \frac{1}{2}, m, \ell\right| H_{LS} \left|n, j = \ell \pm \frac{1}{2}, m, \ell\right\rangle$
(Geben Sie $\Delta_{LS,\pm}$ *auch explizit an!) und* $\Delta = \Delta_{LS,+} - \Delta_{LS,-}$.

(b) Betrachten Sie nun den Limes $\Delta \gg \mu_B B$.
Zeigen Sie, dass dies auf den in der Vorlesung betrachteten Grenzfall führt, in dem H_B als Störung gegenüber $H_0 + H_{LS}$ betrachtet wurde.

(c) Nehmen Sie für H_{LS} nun explizit das Coulomb-Potential für ein Elektron in einem Atom mit Kernladungszahl Z an,

$$V_C(r) = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0\, r}\,.$$

Betrachten Sie $\langle n\ell m| \, [H_0, \frac{\hbar}{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}] \, |n\ell m\rangle$, und werten Sie dies zum einen direkt aus (das Ergebnis sollten Sie direkt sehen), zum anderen explizit durch Berechnen des Kommutators.
Benutzen Sie

$$\langle n\ell| \, \frac{1}{r^2} \, |n\ell\rangle = \left(\frac{Ze^2 m_e}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)^2 \frac{1}{n^3}\frac{2}{2\ell+1}$$

und finden damit die explizite Form von $\Delta_{LS,\pm}$.

Aufgabe 22: 2-Niveau-System mit harmonischem Potential (*2+6=8 Punkte*)

Betrachten Sie ein 2-Niveau System mit einem zeitabhängig oszillierendem, harmonischem Potential als Störung,

$$H_0 = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} , \qquad\qquad V(t) = \begin{pmatrix} 0 & \hbar\gamma e^{i\omega t} \\ \hbar\gamma e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}$$

mit reellen und positiven ω und γ, sowie der Anfangsbedingung, dass zur Zeit $t = 0$ nur der Zustand 1 besetzt sei, $c_1(0) = 1$, $c_2(0) = 0$.

(a) Stellen Sie ein System von Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_{1,2}(t)$ auf.

(b) Lösen Sie die Differentialgleichungen mit dem Ansatz

$$c_j(t) = \beta_j e^{i\alpha_j t}$$

und bestimmen Sie die $c_j(t)$.
Verifizieren Sie, dass $|c_1(t)|^2 + |c_2(t)|^2 = 1$.