Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 11

Abgabe: Fr, 20.01.17
Besprechung: Di, 24.01.17

Aufgabe 31: Drei identische Teilchen (*2+3+2=7 Punkte*)

Ein Atom mit drei Elektronen werde durch einen Hamiltonoperator

$$H = \sum_{i=1}^{3} \left[\frac{\vec{p}_i^{\,2}}{2m} + V(\vec{r}_i) \right]$$

beschrieben. Der Einteilchen-Hamiltonoperator hat nicht entartete Energieeigenwerte $E_1 < E_2 < E_3 < \ldots$ zu Eigenzuständen $\psi_1(\vec{r})$, $\psi_2(\vec{r})$, $\psi_3(\vec{r})$, ... Wir verwenden die Abkürzung

$$\psi_{451}\,|+-+\rangle \equiv \psi_4(\vec{r}_1)\,|+\rangle \otimes \psi_5(\vec{r}_2)\,|-\rangle \otimes \psi_1(\vec{r}_3)\,|+\rangle$$

für einen Zustand mit Elektron 1 im Einteilchenzustand $\psi_4(\vec{r}_1)$ mit $s_z = +\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_4$, Elektron 2 im Zustand $\psi_5(\vec{r}_2)$ mit $s_z = -\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_5$ sowie Elektron 3 im Zustand $\psi_1(\vec{r}_3)$ mit $s_z = +\frac{1}{2}$ und Energie $E = E_1$.

(a) Konstruieren Sie den Zustand $|\Psi\rangle$ der geringstmöglichen Energie, wenn der Gesamtspin $s = \frac{3}{2}$, $s_z = +\frac{3}{2}$ sein soll.

(b) Konstruieren Sie den Grundzustand $|G\rangle$ des Atoms mit $s_z = +\frac{1}{2}$. Welche Energie hat der Grundzustand?

(c) Welchen Gesamtspin S hat der Zustand $|G\rangle$? Warum?

Aufgabe 32: Fermionen in der Klein-Gordon-Gleichung (*4 Punkte*)

Zeigen Sie, dass für Lösungen der Dirac-Gleichung $\psi(x)$ auch

$$\left[\left(\frac{\partial}{\partial(ct)} \right)^2 - \vec{\nabla}^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \right] \psi(x) = 0$$

gilt. Dirac-Fermionen erfüllen also auch die Klein-Gordon-Gleichung.

Aufgabe 33: Dirac-Teilchen im elektromagnetischen Feld (*2+3=5 Punkte*)

Ein Dirac-Teilchen im zeitabhängigen elektromagnetischen Feld $(\varphi, \vec{A})(t)$ wird durch den Hamiltonoperator

$$H = c\vec{\alpha} \cdot \vec{\pi} + \beta mc^2 + q\varphi, \qquad \vec{\pi} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} - q\vec{A}$$

beschrieben. Verwenden Sie die Heisenbergschen Bewegungsgleichungen, um

(a) den Geschwindigkeitsoperator $\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$ zu bestimmen und

(b) zu zeigen, dass auch auf Operatorniveau die Lorentzkraft $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{\pi}}{\mathrm{d}t}$ als

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

geschrieben werden kann.

Aufgabe 34: Gamma-Algebra (*4 Punkte*)

Zeigen Sie die folgenden Eigenschaften der Gamma-Matrizen

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 \cdot \mathbb{1}_4\,, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha\,, \\
\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} \cdot \mathbb{1}_4\,, \\
\mathrm{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\beta] &= 4g^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

mit Hilfe der Antikommutatorrelation $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4$.