Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 12

Abgabe: Fr, 27.01.17
Besprechung: Di, 31.01.17

Anmeldung der Vorleistung in QISPOS bzw. CAMPUS nicht vergessen!

Aufgabe 35: Darstellungen der γ-Matrizen (*3+2=5 Punkte*)

Aus der Herleitung der Dirac-Gleichung folgt, dass die γ-Matrizen die Antikommutatorrelation

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \cdot \mathbb{1}_4$$

erfüllen müssen. Dies legt ihre exakte Form jedoch noch nicht fest.
Mögliche Darstellungen sind z.B. die Dirac-Darstellung

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & -\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

oder die chirale Darstellung

$$\gamma_\chi^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{1}_2 \\ \mathbb{1}_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma_\chi^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ -\sigma^i & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Pauli-Matrizen σ^i.

(a) Zeigen Sie für die beiden Darstellungen durch explizite Rechnung, dass diese die Antikommutatorrelation sowie $(\gamma^\mu)^\dagger = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0 = g^{\mu\mu}\gamma^\mu$ (keine Summe über μ) erfüllen.

(b) Finden Sie eine unitäre Transformation U, die die beiden Darstellungen über die Beziehung $\gamma_\chi^\mu = U\gamma_D^\mu U^{-1}$ verknüpft. Machen Sie dazu den Ansatz

$$U = \begin{pmatrix} a\,\mathbb{1}_2 & b\,\mathbb{1}_2 \\ c\,\mathbb{1}_2 & d\,\mathbb{1}_2 \end{pmatrix}$$

mit a, b, c, $d \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 36: Relativistische Korrekturen des Wasserstoffspektrums
(*2+2+3+5+3=15 Punkte*)

Der Hamiltonoperator des Wasserstoffatoms kann als

$$H = H_0 + H_{LS} + H_r + H_D$$

geschrieben werden. Darin ist $H_0 = \vec{p}^{\,2}/2m + V$ mit $V = V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0\, r)$.
Die restlichen Terme werden als Störung zu H_0 betrachtet und lauten

$$\begin{aligned} H_{LS} &= \frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V(r)}{\mathrm{d}r}\vec{S}\cdot\vec{L}\,, \\ H_r &= -\frac{1}{2mc^2}\left(\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\right)^2\,, \\ H_D &= \frac{\hbar^2}{8m^2c^2}\vec{\nabla}^2 V(r)\,, \end{aligned}$$

wobei $V(r) = -e^2/(4\pi\epsilon_0\, r)$.

(a) Zeigen Sie, dass der Gesamtdrehimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ erhalten ist.

(b) Zeigen Sie, dass der Darwin-Term H_D nur Energiekorrekturen zu s-Zuständen liefert.

(c) Bestimmen Sie die Korrektur zum reinen Coulomb-Energieniveau durch den Darwin–Term.

(d) Berechnen Sie die Energiekorrekturen durch die beiden verbleibenden Störungen H_{LS} sowie H_r.
Verwenden Sie dazu das bereits in Aufgabe 21 gefundene Ergebnis

$$\left\langle \frac{1}{r^3} \right\rangle \equiv \int_0^\infty \mathrm{d}r\; r^2 |R_{nl}(r)|^2 \frac{1}{r^3} = \frac{2}{a_0^3 \ell(\ell+1)(2\ell+1)} \frac{1}{n^3}\,(1-\delta_{\ell 0})$$

sowie

$$\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = \frac{1}{n^2 a_0^2}\,, \qquad\qquad \left\langle \frac{1}{r^2} \right\rangle = \frac{1}{n^3 a_0^2(\ell+\frac{1}{2})}\,.$$

(e) Bestimmen Sie die Summe der drei Störterme und zeigen Sie, dass die Energieniveaus des Wasserstoffatoms als

$$E_{nj}^{(1)} = E_n^{(0)}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\delta_{LS} + \delta_r + \delta_D\right)\right] = E_n^{(0)}\left[1 + \frac{\alpha^2}{n}\left(\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right)\right]$$

geschrieben werden können. Berechnen Sie die Beiträge $\delta_{LS}, \delta_r, \delta_D$ der verschiedenen Störungen und deren Summe für $n \leq 3$ explizit und skizzieren Sie das resultierende Termschema.