Moderne Theoretische Physik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. M. Rauch

Übungsblatt 13

Abgabe: Fr, 03.02.17
Besprechung: Di, 07.02.17

Anmeldung zu Vorleistung & Klausur in QISPOS/CAMPUS nicht vergessen!

Aufgabe 37: Kleinsches Paradoxon (*5+5+2+3=15 Punkte*)

Untersuchen Sie ein Elektron in einem stufenförmigen (elektrostatischen) Potential

$$V(\vec{r}) = q\Phi(\vec{r}) = V(z) = \begin{cases} V_0 & z \geq 0 \\ 0 & z < 0\,. \end{cases}$$

Eine stationäre Lösung ($E \geq mc^2$) der Dirac-Gleichung lässt sich in der Gestalt

$$\psi(\vec{r}) = e^{-iEt/\hbar}[\psi_i(z) + \psi_r(z) + \psi_t(z)]$$

schreiben. Darin lauten der einlaufende, reflektierte und transmittierte Anteil der sich parallel zur z-Achse ausbreitenden Welle

$$\psi_i(z) = a e^{ik_1 z}\sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{\hbar c k_1}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix} \qquad (z<0)\,,$$

$$\psi_r(z) = e^{-ik_1 z}\sum_{r=1}^{2} b_r\, w_r(-\hbar k_1) \qquad (z<0)\,,$$

$$\psi_t(z) = e^{ik_2 z}\sum_{r=1}^{2} d_r\, w_r(\hbar k_2) \qquad (z>0)\,.$$

Dabei sind $k_1 \in \mathbb{R}$, $k_1 > 0$ und $k_2 \in \mathbb{C}$, und die Spinoren $w_{1,2}$ lauten

$$w_1(\hbar k) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}1\\0\\\frac{c\hbar k}{E+mc^2}\\0\end{pmatrix}\,, \qquad w_2(\hbar k) = \sqrt{\frac{E+mc^2}{2mc^2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\frac{-c\hbar k}{E+mc^2}\end{pmatrix}\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Konstanten $b_{1,2}$ und $d_{1,2}$.
Benutzen Sie für Ihr Ergebnis auch die Abkürzung

$$R := \frac{k_2}{k_1} \frac{E + mc^2}{E - V_0 + mc^2} \,.$$

(b) Berechnen Sie den Strom

$$\vec{j} = c\bar{\psi}(\vec{r},t)\vec{\gamma}\psi(\vec{r},t)$$

und zerlegen ihn in die Beiträge $\vec{j}_i, \vec{j}_r, \vec{j}_t$, also einen einfallenden, einen reflektierten und einen auslaufenden Strom. Drücken Sie die Verhältnisse j_r/j_i und j_t/j_i durch R aus.

(c) Diskutieren Sie die Lösungen aus Teil (a) und (b) für die verschiedenen Situationen $V_0 < E - mc^2$, $E - mc^2 < V_0 < E + mc^2$, $V_0 > E + mc^2$.

(d) Zeigen Sie, dass der Strom bei $z = 0$ erhalten ist. Was ist trotzdem eigenartig an Ihrem Ergebnis (Kleinsches Paradoxon)?

Aufgabe 38: Bilineare Kovarianten (*1+1+1+1+1=5 Punkte*)

Untersuchen Sie die 16 Γ-Matrizen, die zur Konstruktion bilinearer Kovarianten benutzt werden,

$$\begin{aligned}
&\Gamma^S = \mathbb{1}_4 \,, && \Gamma^P = \gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \,, && \\
&\Gamma^V_\mu = \gamma_\mu \,, && \Gamma^A_\mu = \gamma_\mu\gamma^5 \,, && \mu = 0 \ldots 3 \,, \\
&\Gamma^T_{\mu\nu} = \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \,, && && \mu, \nu = 0 \ldots 3 \,, \quad \mu < \nu \,.
\end{aligned}$$

(a) Zeigen Sie $(\Gamma^n)^2 = \pm\mathbb{1}_4$ für alle n.

(b) Finden Sie zu jedem $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ ein antikommutierendes Γ^m.

(c) Bestimmen Sie die Spur jedes Γ^n.

(d) Zeigen Sie, dass es zu jedem Paar $a \neq b$ ein $\Gamma^n \neq \Gamma^S$ gibt, so dass gilt

$$\Gamma^a\Gamma^b = \varphi\Gamma^n \,, \qquad \varphi \in \{\pm 1, \pm i\} \,.$$

(e) Das legt nahe, dass die Γ^n eine Basis bilden. Zeigen Sie die lineare Unabhängigkeit der Γ^n.