Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. J. Davies, D. Wellmann
http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718

WS 17/18 – Blatt 01
Abgabe: 23.10.2017, 11:30 Uhr
Besprechung: 24.10.2017

Aufgabe 1* (5 Punkte)

(i) Nutzen Sie kartesische Koordinaten und zeigen Sie, dass

$$\vec{p}^2 = \frac{1}{r^2}\left[\vec{L}^2 + (\vec{r}\cdot\vec{p})^2 - i\hbar\vec{r}\cdot\vec{p}\right],$$

wobei $\vec{L}$ der Drehimpulsoperator, $\vec{p}$ der Impulsoperator und $\vec{r}$ der Ortsoperator ist.

(ii) Wechseln Sie nun zu Kugelkoordinaten und bringen Sie die zeitunabhänige Schrödingergleichung für ein freies Teilchen mit Hilfe des obigen Ausdrucks für $\vec{p}^2$ in folgende Form:

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\left[\frac{1}{r^2}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{L^2}{\hbar^2 r^2}\right]u(r) = E\,u(r). \tag{1}$$

(iii) Gehen Sie zu dimensionslosen Variablen $\rho = kr$, $\hbar^2 k^2 = 2mE$ über und drücken Sie Gleichung (1) aus durch

$$T_l\,\xi(\rho) = \left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right]\xi(\rho) = 0. \tag{2}$$

(iv) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass Gleichung (2) durch die Funktionen

$$j_l = (-\rho)^l\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l\left(\frac{\sin\rho}{\rho}\right), \quad n_l = -(-\rho)^l\left(\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)^l\left(\frac{\cos\rho}{\rho}\right)$$

gelöst werden kann. *Hinweis: Versuchen Sie dazu einen Faktor $(\rho^{-1}d/d\rho)$ nach links durchzukommutieren, und auf den Ausdruck $((l-1)/\rho - d/d\rho)T_{l-1}j_{l-1}$ zu kommen.*

(v) *Fakultativ:* Untersuchen Sie das Verhalten von j_l und n_l für sehr große bzw. kleine Werte von ρ. Zeigen Sie:

$$\lim_{\rho\to\infty} j_l(\rho) = \frac{(-1)^l}{\rho}\sin\left(\rho + \frac{\pi l}{2}\right), \qquad \lim_{\rho\to\infty} n_l(\rho) = \frac{(-1)^{l+1}}{\rho}\cos\left(\rho + \frac{\pi l}{2}\right),$$

und

$$\lim_{\rho\to 0} j_l(\rho) = \frac{(2l)!!}{(2l+1)!}\rho^l, \qquad \lim_{\rho\to 0} n_l(\rho) = \frac{(2l-1)!!}{\rho^{l+1}}.$$

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Zeigen Sie für Vorwärtsstreuung ($\theta = 0$), dass der ungestreute Anteil der Welle mit der gestreuten Welle destruktiv interferiert. Gehen Sie folgendermaßen vor:

(i) Berechnen Sie den Wahrscheinlichkeitsstrom für die Überlagerung von gestreuter und ungestreuter Welle. Begründen Sie, warum Terme $\propto r^{-2}, r^{-3}$ vernachlässigt werden können.

(ii) Betrachten Sie den durch den Interferenzterm gegebenen Fluss des Wahrscheinlichkeitsstroms durch eine Kugeloberfläche vom Radius r. Nutzen Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue um im Limes großer r auf folgendes Ergebnis für den Fluss durch die Kugeloberfläche zu kommen,

$$-\frac{2\hbar}{m}(2\pi)\,\mathrm{Im}f(\theta = 0).$$

Hinweis: $e^{\alpha x} = \frac{1}{\alpha}\frac{d}{dx}e^{\alpha x}$.

(iii) Leiten Sie aus der Kontinuitätsgleichung eine Beziehung zwischen dem gestreuten Anteil und dem Interferenzterm her. Zeigen Sie damit, dass der Beitrag des Interferenzterms negativ ist.

(iv) *Fakultativ:* Leiten Sie daraus das optische Theorem her, welches den Imaginärteil der Streuamplitude mit dem totalen Wirkungsquerschnitt in Verbindung setzt:

$$\sigma_{\mathrm{tot}} = \frac{4\pi}{k}\mathrm{Im}f(\theta = 0).$$
