Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. J. Davies, D. Wellmann
http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718

WS 17/18 – Blatt 02
Abgabe: 10.11.2017, 11:30 Uhr
Besprechung: 14.11.2017

Aufgabe 1
Berechnen Sie die minimale kinetische Energie eines Positronenstrahls (in GeV), sodass die Reaktion $e^+e^- \to K^+K^-$ mit ruhenden Elektronen möglich ist ($m_e = 0.511\,\mathrm{MeV}/c^2$, $m_K = 494\,\mathrm{MeV}/c^2$, $1\,\mathrm{GeV} = 10^3\,\mathrm{MeV} = 10^9\,\mathrm{eV}$, c ist die Lichtgeschwindigkeit).

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung eines quantenmechanischen Teilchens am winkelabhängigen Potential

$$V(\vec{r}) = V_0 \begin{cases} \cos(\theta) & \text{falls } |\vec{r}| < R \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Seien die Wellenvektoren von gestreuter und ungestreuter Welle bezeichnet mit $\vec{k}$ bzw. $\vec{k}'$. Sei ferner $K := |\vec{k}' - \vec{k}|$.

(i) Berechnen Sie die Streuamplitude $f(\theta, \phi)$ in Bornscher Näherung.
Hinweis: Man erhält $f(\theta,\phi) \sim (KR\sin(KR) + 2\cos(KR) - 2)/K^3$.

(ii) Bestimmen Sie damit den differentiellen Wirkungsquerschnitt $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ und entwickeln Sie ihn bis zur zweiten nichtverschwindenden Ordnung in $KR \ll 1$.

(iii) Berechnen Sie für $KR \ll 1$ den totalen Wirkungsquerschnitt.

Aufgabe 3* (5 Punkte)

Betrachten Sie die Streuung eines Teilchens an einer unendlich harten Kugel ($V = \infty$ für $r < R$,$V = 0$ sonst).

(i) Bestimmen Sie die Streuphasen δ_0, δ_1, δ_2, sowie ihr Verhalten für kleine Werte von $\rho = kR$.

(ii) Sei nun $\rho = 0.9$. Wenn Sie in (i) keinen Fehler gemacht haben, erhalten Sie $\delta_1 = -0.1672$, $\delta_2 = -0.0107$. Berechnen Sie die Winkelverteilung der Streuung $d\sigma/d\Omega$ und skizzieren Sie diese als Funktion von $\cos\theta$. Berechnen Sie die Beiträge dieser Wellen zum totalen Wirkungsquerschnitt.

(iii) Es gilt ferner $\sigma_{\text{tot}} = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\xi_l(\rho)$ mit $\xi_l(\rho) = j_l^2(\rho)/(j_l^2(\rho) + n_l^2(\rho))$. Geben Sie die Grenzen von ξ_l für kleine und große Werte von ρ an. Überprüfen Sie hiermit Aufgabe (i).

Aufgabe 4

Es soll aus der Messung eines Wirkungsquerschnitts für Elektronstreuung an einem Atomkern die Ladungsverteilung im Kern rekonstruiert werden. Das elektrostatische Potential einer Ladungsverteilung $\rho(\vec{r})$ ist bekanntlich gegeben durch

$$V(\vec{r}) = -e \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \ .$$

(i) Zeigen Sie, dass der differentielle Wirkungsquerschnitt in Bornscher Näherung über den Rutherford-Wirkungsquerschnitt $(d\sigma/d\Omega)_R$ und einen Formfaktor $F(\vec{q})$ ausgedrückt werden kann, sodass gilt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R F(\vec{q})^2 \ ,$$

wobei $\vec{q} = \vec{k} - \vec{k}\,'$ der Impulsübertrag ist. Berechnen Sie $F(\vec{q})$.

(ii) Wie vereinfacht sich dieser Ausdruck im kugelsymmetrischen Fall, d.h. für $\rho(\vec{r}) = \rho(|\vec{r}|)$?

(iii) Der Fit an eine Messreihe für Elektronstreuung am Proton ergebe

$$F(\vec{q}) = F(q) \approx \frac{1}{(1 + q^2/a^2)^2}, \quad a = 4.3\,\mathrm{fm}^{-1} \ .$$

Welche Ladungsverteilung folgt daraus? Wie groß ist der mittlere quadratische Radius $\langle r^2 \rangle$? Welcher Radius ergibt sich daraus ungefähr für das Proton?
