

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. J. Davies, D. Wellmann
<http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718>

WS 17/18 – Blatt 03
Abgabe: 24.11.2017, 11:30 Uhr
Besprechung: 28.11.2017

Aufgabe 1* (5 Punkte)

Der Radialanteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms $\Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ ist gegeben durch:

$$R_{nl}(r) = - \left(\frac{2}{a_0} \right)^{3/2} \frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2[(n+l)!]^3}} F_{nl} \left(\frac{2r}{na_0} \right), \quad \text{mit} \quad F_{nl}(\rho) = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n-l-1}^{2l+1}(\rho).$$

$a_0 = \frac{\hbar}{amc} = 0.529 \times 10^{-10}$ m ist der Bohrsche Radius. Dabei lauten für $p, k \in \mathbb{N}$ die Laguerre-Polynome

$$L_p^0 = e^\rho \frac{d^p}{d\rho^p} (\rho^p e^{-\rho}), \quad L_p^k = (-1)^k \frac{d^k}{d\rho^k} L_{p+k}^0,$$

und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{(p)!}{[(p+k)!]^3} \int_0^\infty d\rho \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_q^k(\rho) = \delta_{pq}.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren (i) $1/r$, (ii) $1/r^2$ und (iii) $1/r^3$ für die gebundenen Energieeigenzustände. Nutzen sie das Ergebnis aus (i) um mit Hilfe des Virial Theorems die mittlere Geschwindigkeit eines Elektrons im Wasserstoffatom zu berechnen.

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Positronium ist ein Atom, das aus einem Elektron e^- und seinem Antiteilchen, dem Positron e^+ besteht. Betrachten Sie ein solches Atom im Grundzustand, welches sich in einem Magnetfeld \vec{B} parallel zur z-Achse befindet. Der Hamilton-Operator kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{HF} + H_Z, \\ H_{HF} &= A \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \\ H_Z &= -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet H_0 den Hamilton-Operator des Positroniums, der nur die elektrostatische Wechselwirkung zwischen Elektron und Positron enthält. \vec{S}_1 und \vec{S}_2 sind die Spinoperatoren von Elektron bzw. Positron und $\vec{\mu}_1$ und $\vec{\mu}_2$ deren magnetische Momente. \vec{S}_i und $\vec{\mu}_i$ sind durch die gyromagnetischen Verhältnisse γ_1 und γ_2 miteinander verknüpft:

$$\vec{\mu}_i = \gamma_i \vec{S}_i, \quad i = 1, 2.$$

Für das Elektron und das Positron gilt $\gamma_1 = -\gamma_2$. H_{HF} beschreibt die magnetische Wechselwirkung zwischen \vec{S}_1 und \vec{S}_2 und H_Z die Kopplung von \vec{B} an die magnetischen Momente.

(a) Berechnen Sie die Matrixelemente des Störoperators $H_{HF} + H_Z$ in der Basis $\{|F, m_F\rangle\}$, wobei F und m_F die Quantenzahlen des Gesamtspins

$$\vec{F} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

sind.

(b) Bestimmen Sie die Aufspaltung des $1S$ -Grundzustands in erster Ordnung Störungstheorie.

(c) Stellen Sie graphisch die Energieaufspaltung als Funktion des Magnetfelds B dar.

Aufgabe 3

Wir betrachten ein Elektron im Potential eines isotropen harmonischen Oszillators. Unter Vernachlässigung des Spins ergibt sich der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 .$$

Aus der QM I ist bekannt, dass sich ein solches System beschreiben lässt als Produkt dreier harmonischer Oszillatoren mit gleicher Frequenz. Die Leiteroperatoren seien mit a_x, a_y, a_z bezeichnet. Der Übergang zum Kugelkoordinaten Fall lässt sich nun in der Operatorsprache vollziehen. Definiere dazu

$$a_d = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y) , \quad a_g = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y) ,$$

sowie die zugehörigen Operatoren $N_g = a_g^\dagger a_g, N_d = a_d^\dagger a_d, N_z = a_z^\dagger a_z$ und Drehimpulsoperatoren

$$\begin{aligned} L_z &= \hbar(N_d - N_g) , \\ L_+ &= L_x + iL_y = \hbar\sqrt{2}(a_z^\dagger a_g - a_d^\dagger a_z) , \\ L_- &= L_x - iL_y = \hbar\sqrt{2}(a_g^\dagger a_z - a_d^\dagger a_d) . \end{aligned}$$

(i) Zeigen Sie, dass L_x, L_y, L_z eine Drehimpulsalgebra bilden, und dass

$$|n_d, n_g, n_z\rangle := (n_d!n_g!n_z!)^{-1/2}(a_d^\dagger)^{n_d}(a_g^\dagger)^{n_g}(a_z^\dagger)^{n_z}|0, 0, 0\rangle$$

Eigenzustände zu H und L_z sind. Wie lauten die dazugehörigen Eigenwerte?

(ii) Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem sukzessive die gemeinsamen Eigenzustände zu \vec{L}^2 und L_z durch die Zustände $|n_d, n_g, n_z\rangle$ ausgedrückt werden können. Starten Sie dabei jeweils mit $|n_d, 0, 0\rangle$. Damit können im Folgenden die Eigenzustände mit Hilfe von $n = n_x + n_y + n_z, l, m_l$ klassifiziert werden. Eine explizite Berechnung der Basistransformation ist nicht nötig.

Setzen Sie im Folgenden die Kenntnis dieses Basiswechsels voraus, und behandeln Sie (iii)-(v) in der gemeinsamen Eigenbasis von \vec{L}^2 und L_z .

- (iii) Welche Form nimmt hier der Darwin-Term an? Berechnen Sie die führende Energie-Korrektur. Ist diese „klein“?
- (iv) Betrachten wir nun auch den Spin des Elektrons. Welche Form ergibt sich für den Term des Hamiltonoperators, der die Spin-Bahn-Kopplung beschreibt? (Gehen Sie analog zum Potential eines Atomkerns vor). Bestimmen Sie auch hier die führende Energiekorrektur.
- (v) Welche Wechselwirkungsterme müssen im Fall eines externen Magnetfeldes beachtet werden? Welche Form haben die Beiträge zum Hamiltonoperator? Welche Matrixelemente müssen in erster Ordnung Störungstheorie berechnet werden?

Die 1. Vorleistung ist im QISPOS freigeschaltet. Bitte melden Sie sich an!