Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. J. Davies, D. Wellmann
http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718

WS 17/18 – Blatt 04
Abgabe: 08.12.2017, 11:30 Uhr
Besprechung: 09.01.2018

Aufgabe 1* (5 Punkte)

(i) Betrachten Sie ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld.

(a) Leiten Sie für dieses die Klein-Gordon-Gleichung her.

(b) Sei Ψ nun Lösung dieser Gleichung für ein Teilchen mit Ladung q. Zeigen Sie, dass Ψ^* die Lösung für ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt.

(ii) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet.

(a) Zeigen Sie, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$[E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r}) \quad = \quad (m^2c^4 - \hbar^2c^2\triangle)u(\vec{r})\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Problems.

(b) Vergleichen Sie das daraus folgende Eigenwertproblem mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2+[(l+1/2)^2-(Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

(c) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie ein relativistisches, geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.

(a) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion

$$L = \; - mc^2\sqrt{1-\beta^2} - q\Phi(\vec{r},t) + q\vec{v}\cdot\vec{A}(\vec{r},t)\,, \quad \beta^2 = \vec{v}^{\,2}/c^2\,.$$

$\vec{A}$ ist das Vektorpotential und Φ ist das skalare Potential.

(b) Sei

$$K^0 = \frac{1}{c}\frac{\vec{F}_L\cdot\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad K^i = \frac{F_L^i}{\sqrt{1-\beta^2}}\;.$$

Zeigen Sie, dass für diese kovariante Formulierung der Lorentz-Kraft gilt

$$K^\mu = qF^{\mu\nu}\frac{p_\nu}{m}$$

wobei p_ν der Viererimpuls des Teilchens ist. Die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L$ ist, wie in der klassischen Mechanik, gegeben durch $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ das elektrische bzw. magnetische Feld bezeichnet.

(c) Stellen Sie die kovariante Form der Bewegungsgleichung auf.

Aufgabe 3* (5 Punkte)

(i) Die Gamma- oder auch Dirac-Matrizen sind für $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ definiert über die Dirac-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$. In der Dirac-Darstellung lassen sie sich in der expliziten Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 := i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3$$

darstellen, wobei σ_i, $i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen. Drücken Sie die Matrizen

$$\sigma_{\mu\nu} \quad = \quad \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3,$$

durch die Pauli-Matrizen aus.

(ii) Zeigen Sie, dass aus der Antikommutatorrelation der Gamma-Matrizen folgt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}).$$

(iii) Seien a und b Vierervektoren und gelte die Notation $\not{a} = a_\mu\gamma^\mu$. Berechnen Sie

$$\gamma_\mu\gamma^\mu, \qquad \gamma_\mu\not{a}\gamma^\mu, \qquad \gamma_\mu\not{a}\not{b}\gamma^\mu.$$

Fakultativ: Verifizieren Sie: $\not{a}\not{b} + \not{b}\not{a} = 2a \cdot b$, $\gamma^\nu\not{a} + \not{a}\gamma^\nu = 2a^\nu$ und $\not{a}\not{b}\not{a} = -a^2\not{b} + 2(a \cdot b)\not{a}$

(iv) Nutzen Sie die Dirac-Algebra sowie die Definition des Konjugierten eines allg. Produktes von Gammamatrizen, $\overline{\Gamma} := \gamma_0\Gamma^\dagger\gamma_0$, um folgende Eigenschaften der Dirac-Matrizen herzuleiten:

$$\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0, \qquad (\gamma^0)^\dagger = \gamma_0, \quad (\gamma^k)^\dagger = -\gamma^k, \qquad \bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu, \quad \bar{\gamma}_5 = -\gamma_5, \qquad \overline{\gamma_\mu\gamma_5} = \gamma_\mu\gamma_5.$$

Fakultativ: Sei nun ψ eine Lösung der Diracgleichung. Welcher Gleichung genügt $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$?

(v) *Fakultativ:* Berechnen Sie mithilfe obiger Ergebnisse folgende Spuren über Produkte von Gamma-Matrizen:

(a) $\mathrm{T}r(\gamma_5) = 0$,
(b) $\mathrm{T}r(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$,
(c) $\mathrm{T}r(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\delta) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\delta} - g^{\mu\rho}g^{\nu\delta} + g^{\mu\delta}g^{\nu\rho})$,
(c) $\mathrm{T}r(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma\gamma_5) = -4i\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$.

Hinweis: Verwenden Sie die zyklischen Vertauschbarkeit unter der Spur, d.h. $\mathrm{T}r(AB) = \mathrm{T}r(BA)$.

Am Dienstag, den 12.12.2017 findet die Probeklausur während den Tutorienzeiten statt. Die Probeklausur muss in dem Tutorium geschrieben werden, zu dem Sie sich am Anfang des Semesters eingetragen haben (siehe http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718). Hilfsmittel: Ein eigenhändig beschriebenes DIN A4 Blatt. Bringen Sie bitte zur Probeklausur Ihren Studentenausweis mit.