

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. J. Davies, D. Wellmann
<http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718>

WS 17/18 – Blatt 05
Abgabe: 08.01.2018, 11:30 Uhr
Besprechung: 09.01.2018

Problem 1

Seien $u(p)$ und $\bar{u}(q)$ Dirac Spinoren im Impulsraum. Nutzen Sie die Dirac Gleichung und zeigen Sie, dass $\bar{u}(q)\gamma^\mu u(p)$ in zwei Terme proportional zu $g^{\mu\nu}$ und $\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ zerlegt werden kann.

Problem 2

Wählt man als Ansatz für die Dirac-Gleichung $(i\cancel{\partial} - m)\psi(x) = 0$ für Teilchen mit positiver Energie $\psi(x) = u(x)e^{-ipx}$, so erhält man unter anderem die Lösung $u^{(1)}$ mit

$$u^{(1)} = N \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \frac{\vec{p} \cdot \vec{\sigma}}{p_0 + m} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

- (i) Zeigen Sie, dass die Konstante $N = \sqrt{\frac{p_0 + m}{2m}}$ die Normierungsbedingung $\bar{u}^{(1)}u^{(1)} = 1$ erfüllt.
- (ii) Berechnen Sie damit den Strom $j^\mu = \bar{u}^{(1)}\gamma^\mu u^{(1)}$
- (iii) Betrachten Sie in (ii) für $\mu = 0$ den nicht-relativistischen Grenzfall und geben Sie Ihr Ergebnis für j^0 bis zur Ordnung $\mathcal{O}(v^4)$ an, wobei $v = |\vec{v}| = |\frac{\vec{p}}{m}|$ die Geschwindigkeit des Teilchens sei.

Problem 3* (10 Punkte)

Betrachten Sie die Vernichtung eines e^-e^+ Paares in ein $\mu^-\mu^+$ Paar. Die Teilchen tragen dabei die Vierer-Impulse p_1, p_2, q_1, q_2 . Für diesen Prozess, kann folgendes Matrixelement aufgestellt werden

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{s} \left(\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1) \right) \left(\bar{u}(q_1)\gamma_\mu v(q_2) \right),$$

wobei $q = p_1 + p_2 = q_1 + q_2$ und $q^2 = s$ ist.

- (i) Zeigen Sie, dass das quadrierte Matrixelement, nach der Mittelung über die Spins der eingehenden Teilchen (s_1, s_2) und der Summierung über die Spins der ausgehenden Teilchen (r_1, r_2), folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$\frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \sum_{r_1, r_2} \frac{e^4}{s^2} \left(\bar{v}(p_2)\gamma^\mu u(p_1)\bar{u}(p_1)\gamma^\nu v(p_2) \right) \left(\bar{u}(q_1)\gamma_\mu v(q_2)\bar{v}(q_2)\gamma_\nu u(q_1) \right).$$

- (ii) Berechnen Sie den obigen Ausdruck. Drücken Sie Ihr Ergebnis durch Skalarprodukte der Vierer-Impulse der beteiligten Teilchen und ihre Massen aus.
- (iii) Vernachlässigen Sie die Massen von Elektron und Positron und schreiben Sie Ihr Ergebnis als Funktion der Muon-Massen, der Muon-Energien, deren Streuwinkel im Bezug auf die Einfallsrichtung des Elektrons im Schwerpunktsystem.