Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. J. Davies, D. Wellmann
http://www.ttp.kit.edu/~wellmann/TheoE/WS1718

WS 17/18 – Blatt 06
Abgabe: 19.01.2018, 11:30 Uhr
Besprechung: 23.01.2018

Aufgabe 1

Ein Tritiumkern (^{3}H) verwandle sich durch β-Zerfall in einem Heliumkern (^{3}He). Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ein Elektron, das sich im Grundzustand des Tritiumatoms befand, im $2s$-Zustand des Heliumatoms gefunden wird.

Aufgabe 2* (5 Punkte)

Als Modell für den photoelektrischen Effekt betrachten wir Teilchen im δ-artigen Potential $V(x) = -\alpha\delta(x)$, mit $\alpha > 0$. Die Eigenzustände lassen sich einteilen in einen gebunden Zustand

$$\phi_0(x) = \sqrt{\frac{m\alpha}{\hbar^2}} e^{-\frac{m\alpha}{\hbar^2}|x|}, \quad E_0 = -\frac{m\alpha^2}{2\hbar^2}$$

und zwei Lösungen pro Energie im Kontinuum. Die Lösung, die sich in positive Richtung bewegt hat die Form

$$\chi_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{ikx} - \frac{1}{1+i\hbar^2 k/m\alpha} e^{-ikx} \right] & \text{für } x < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\hbar^2 k/m\alpha}{1+i\hbar^2 k/m\alpha} e^{ikx} & \text{für } x > 0\,. \end{cases}$$

Hier gilt die Dispersionsrelation für freie Teilchen $E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

(i) Berechnen Sie das Matrixelement $\langle \chi_k | x | \phi_0 \rangle$ des Ortsoperators x.

(ii) Nehmen wir nun an das im Zustand ϕ_0 gebundene Teilchen trage die elektrische Ladung q. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde das Störpotential

$$V(t) = -q\mathcal{E}x \sin \omega t$$

mit der Amplitude $\mathcal{E}$ des elektrischen Feldes angeschaltet. Benutzen Sie Fermis Goldene Regel, um die Rate zu bestimmen, mit der Teilchen aus dem gebundem Zustand in Zustände χ_k übergehen.

(iii) Summieren Sie die Rate über alle möglichen Endzuständen, um die totale Rate zu berechnen. Verwenden Sie hierzu die Zustandsdichte

$$\rho(E) = \sqrt{\frac{2m}{E}}$$

Beachten Sie, dass in der Formel für die Zustandsdichte bereits zwei Zustände pro Energie im Kontinuum berücksichtigt wurden.

Aufgabe 3* (5 Punkte)

Ein Zweizustandssystem im zeitlich harmonischen äußeren Potential wird durch folgenden Hamilton-Operator beschrieben

$$H \quad = \quad H_0 + V(t)\,,$$

wobei H_0 der ungestörte Hamilton-Operator bezeichnet:

$$H_0|1\rangle = E_1|1\rangle\,, \quad H_0|2\rangle = E_2|2\rangle\,, \quad \text{mit} \quad E_2 > E_1\,.$$

Der Störoperator im Raum der ungestörten Eigenzustände $\{|1\rangle, |2\rangle\}$ ist gegeben durch

$$V(t) \quad = \quad \lambda \begin{pmatrix} 0 & e^{i\omega t} \\ e^{-i\omega t} & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Lösen Sie die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung $i\hbar\partial|\Psi(t)\rangle/\partial t = H|\Psi(t)\rangle$ für die Anfangsbedingung $|\Psi(t=0)\rangle = |1\rangle$. Dabei erhalten Sie ein System von gekoppelten Differentialgleichungen für die Koeffizienten $c_n(t) = \langle n|\Psi(t)\rangle$, $n = 1, 2$, das exakt gelöst werden kann.

(ii) Benutzen Sie nun Störungstheorie in niederster, nicht-trivialer Ordnung, um die Koeffizienten $c_n(t)$, $n = 1, 2$, zu berechnen. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit der exakten Lösung von Aufgabenteil (i) für kleine Werte von λ. Betrachten Sie dabei folgende Fälle separat:

(a) $\omega \approx \omega_{21}$ mit $\omega_{21} = (E_2 - E_1)\hbar$;

(b) $\omega \gg \omega_{21}$ bzw. $\omega \ll \omega_{21}$.