Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 1

Ohne Abgabe, Besprechung im ersten Tutorium am 22.10.2019

Aufgabe 1: Harmonischer Oszillator

Betrachten Sie den eindimensionalen harmonischen Oszillator mit dem Hamilton–Operator

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{m\omega^2}{2} x^2 \,, \qquad [\,p, x\,] = -i\hbar\,\mathbb{1}\,.$$

Zum Übergang in die Energiedarstellung definiert man zweckmäßig die Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren $a^\dagger, a$ als

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, x + \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\, p \right) \,, \qquad a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar}} \left(\sqrt{m\omega}\, x - \frac{i}{\sqrt{m\omega}}\, p \right) \,.$$

(a) Berechnen Sie den Kommutator $\left[\, a, a^\dagger \,\right]$.

(b) Drücken Sie H, x und p durch $a, a^\dagger$ sowie $N = a^\dagger a$ aus.

(c) Angewandt auf Energieeigenzustände $|\, n\,\rangle$ wirken $a^\dagger, a$ als Erzeugungs– und Vernichtungsoperatoren, weil $a^\dagger\,|\, n\,\rangle = c'\,|\, n+1\,\rangle$ und $a\,|\, n\,\rangle = c\,|\, n-1\,\rangle$. Bestimmen Sie die beiden Konstanten c, c'.

(d) Berechnen Sie schließlich die Matrixelemente von x und p in der Energiedarstellung, also $x_{mn} = \langle\, m \,|\, x \,|\, n\,\rangle$ und $p_{mn} = \langle\, m \,|\, p \,|\, n\,\rangle$.

Aufgabe 2: Evolution des harmonischen Oszillators im Schrödinger–Bild

Der eindimensionale Oszillator aus Aufgabe 1 sei zur Zeit $t = 0$ durch den Zustand

$$|\, \varphi(0)\,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \big(|\, 0\,\rangle + |\, 1\,\rangle \big)$$

in der Energiedarstellung gegeben. Berechnen Sie unter Zuhilfenahme Ihrer Ergebnisse aus Aufgabe 1

$$\langle\, H\,\rangle \,, \langle\, x\,\rangle \,, \langle\, p\,\rangle \,, \langle\, x^2\,\rangle, \langle\, p^2\,\rangle, (\Delta x)^2 \,, (\Delta p)^2$$

zu beliebigen Zeiten $t > 0$ und überprüfen Sie schließlich die Unschärferelation.

Aufgabe 3: Zweidimensionaler Hamiltonoperator

Diagonalisieren Sie den zweidimensionalen Hamiltonoperator

$$H = \hbar\omega \big(|\, 1\,\rangle\langle\, 1\,| - |\, 2\,\rangle\langle\, 2\,| + |\, 1\,\rangle\langle\, 2\,| + |\, 2\,\rangle\langle\, 1\,| \big) \,.$$

Also bestimmen Sie zunächst die Eigenwerte und Eigenkets in der $\big\{ |\, 1\,\rangle \,, |\, 2\,\rangle \big\}$–Orthonormalbasis und geben Sie schließlich die Spektraldarstellung von H an.

(b.w.)

Aufgabe 4: Rechnen mit Vektoren im Hilbertraum

Die Vektoren $|\, v_1 \,\rangle, |\, v_2 \,\rangle$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem (VONS) in einem zweidimensionalen Hilbertraum $\mathcal{H}$. Darin sind ebenfalls die Vektoren

$$|\, \varphi \,\rangle = (3-i)\,|\, v_1 \,\rangle + (1+2i)\,|\, v_2 \,\rangle \ , \qquad |\, \chi \,\rangle = (1+i)\,|\, v_1 \,\rangle + (1-i)\,|\, v_2 \,\rangle$$

gegeben.

(a) Berechnen Sie das Skalarprodukt $\langle\, \chi \,|\, \varphi \,\rangle$.

(b) Bestimmen Sie die Komponenten von $|\, \varphi \,\rangle$ und $|\, \chi \,\rangle$ bezüglich der orthonormierten Vektoren

$$|\, u_1 \,\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\, v_1 \,\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}\,|\, v_2 \,\rangle \ , \qquad |\, u_2 \,\rangle = \frac{-i}{\sqrt{2}}\,|\, v_1 \,\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\, v_2 \,\rangle \ .$$

(c) Gegeben sei ein linearer Operator A auf dem gleichen Hilbertraum. Zeigen Sie am obigen Beispiel explizit, dass die Spur unabhängig von der gewählten Basis ist, also dass

$$\mathrm{Sp}\, A = \sum_{1,2} \langle\, v_i \,|\, A \,|\, v_i \,\rangle = \sum_{1,2} \langle\, u_i \,|\, A \,|\, u_i \,\rangle \ .$$

(d) Projektoren P_i auf Unterräume $\mathcal{H}_i$ haben die Eigenschaften $P_i^2 = P_i$ und $\sum_i P_i = 1$ (Vollständigkeit), falls die $\mathcal{H}_i$ den gesamten Raum $\mathcal{H}$ aufspannen. Betrachten Sie nun die Projektoren $P_u = |\, u_1 \,\rangle\langle\, u_1 \,|$ und $P_v = |\, v_1 \,\rangle\langle\, v_1 \,|$. Bestimmen Sie die Komponenten von P_u bezüglich $|\, v_i \,\rangle$ und die von P_v bezüglich $|\, u_i \,\rangle$. Schreiben Sie schließlich P_u in der Basis $|\, v_i \,\rangle$.

(e) Zeigen Sie die Eigenschaft der Spur eines Operators aus Teil (c) nun allgemein in einem Hilbertraum beliebiger Dimension.