Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 2

Abgabe: Mi, 30.10.'19, Besprechung: Di, 5.11.'19

Aufgabe 5: Zweidimensionaler harmonischer Oszillator **[10]**

Wir untersuchen den zweidimensionalen Oszillator

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 + 2m\omega^2 y^2 \; .$$

(a) Bestimmen Sie zu allen Zuständen der vier niedrigsten Energien die Energie und die Entartung. Geben Sie auch die Zustände in geeigneten Quantenzahlen an.

Das System wird durch den Operator

$$V = \delta\sqrt{2}\left(\frac{2m\omega}{\hbar}\right)^{3/2} x^2 y$$

gestört.

(b) Berechnen Sie die erste nichtverschwindende Korrektur $\Delta^{(i)}$ zur ungestörten Energie $E = \frac{3}{2}\hbar\omega$.

Aufgabe 6: Variationsrechnung für den Grundzustand im Kastenpotential **[10]**

Ein Teilchen der Masse m befindet sich in einem unendlich hohen Potentialtopf der Breite a in einer Ortsdimension x.

(a) Rekapitulieren Sie die Ergebnisse für die möglichen Energien und die dazugehörigen Wellenfunktionen in der Ortsdarstellung.

(b) Berechnen Sie die Energie E_0 des Grundzustands mit dem Variationsprinzip. Machen Sie dazu einen geeigneten Ansatz für die Wellenfunktion $\psi(x)$ als Polynom in x und berechnen Sie damit die Energie E_0. Wie groß ist die Abweichung von der exakten Lösung aus (a)?

(c) (ohne Bewertung) Probieren Sie auch andere, aufgrund ihrer Symmetrien nicht so gut geeignete Wellenfunktionen für den Grundzustand. Probieren Sie auch einen Ansatz für einen angeregten Zustand.

Aufgabe 7: Lebensdauer beim α–Zerfall **[10]**

Wir untersuchen den α-Zerfall $^{238}\mathrm{U} \to {}^{234}\mathrm{Th} + \alpha$. Dabei tunnelt das α Teilchen, das sich quasi frei im inneren des Kerns bewegt, durch die Barriere des Potentials

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & 0 < r < r_1 \\ \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} & r > r_1 \,. \end{cases}$$

Die Emissionsrate, deren Kehrwert die mittlere Lebensdauer des Kerns ist, ist das Produkt AT aus Auftreffrate A und Tunnelwahrscheinlichkeit T. Erstere bekommen Sie aus einer Abschätzung der Geschwindigkeit des α-Teilchens im inneren des Kerns. Letztere ergibt sich aus dem WKB-Ansatz,

$$T = e^{-2\gamma}, \qquad \gamma = \frac{1}{\hbar}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m(V(r) - E)}\, dr \,.$$

Darin ist r_1 der innere Radius des Potentialtopfes und $r_2 > r_1$ ist der äußere Radius, an dem $V(r_2) = E$ ist. Berechnen Sie γ und damit die mittlere Lebensdauer des Uran-Kerns. Das dabei zu bestimmende Integral

$$I = \int_a^1 \sqrt{\frac{1}{x} - 1}\, dx$$

ist geschlossen lösbar. Betrachten Sie das Ergebnis für $r_1 \ll r_2$ und zeigen Sie, dass

$$\gamma = \frac{e^2\sqrt{2m}}{4\hbar}\frac{Z}{\sqrt{E}} - \frac{4}{\hbar}\sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} m \sqrt{Zr_1}} \,.$$

Wie groß ist die Lebensdauer?

Aufgabe 8: WKB Näherung im Wasserstoffatom **[10]**

Im H-Atom kann die WKB Näherung für die radiale Schrödingergleichung mit Lösungen $R(r) = ru(r)$ verwendet werden, worin das effektive Potential

$$V_{\text{eff}} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}$$

auftaucht. Verwenden Sie die WKB-Bedingung

$$\int_{r_1}^{r_2} p(r)\, dr = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m\,(E - V_{\text{eff}}(r))}\, dr = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi\hbar$$

um einen Ausdruck für die Energieeigenwerte zu bekommen. Vergleichen Sie mit den Ihnen bekannten Lösungen.

Hinweis:

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r}\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}\, dr = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{r_1} - \sqrt{r_2}\right)^2$$