Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 5

Abgabe: Fr, 13.12.’19, 11:30 Uhr, Besprechung: Di, 17.12.’19

Aufgabe 16: Pauli–Matrizen und Drehungen [15]

(a) Zeigen Sie, dass jede unitäre Matrix U mit $\det U = +1$ (unimodular) in zwei Dimensionen (also jedes Element der $SU(2)$) in der Form

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

geschrieben werden kann. Darin sind $a, b \in \mathbb{C}$ (Cayley–Klein Parameter).

(b) Eine allgemeine Spin–$\frac{1}{2}$–Drehung kann auch mit Hilfe von Euler–Winkeln als $U(\alpha, \beta, \gamma)$ parametrisiert werden. Wie lautet der Zusammenhang zwischen den Cayley–Klein–Parametern aus Teil (a) und den Euler–Winkeln (mit Rechnung)?

(c) Ebenso lässt sich eine allgemeine Drehung als $U(\vec{\omega}) = \exp(-i\frac{\vec{\sigma}\cdot\vec{\omega}}{2})$ schreiben. Darin beschreiben $\omega = |\vec{\omega}|$ und $\hat{\omega} = \vec{\omega}/\omega$ die Drehachse bzw. den Drehwinkel und σ_i sind die Pauli–Matrizen. Drücken Sie ω und $\hat{\omega}$ durch die Euler–Winkel aus Teil (b) aus. Testen Sie in Ihrem Ergebnis auch, ob $\hat{\omega}^2 = 1$.

Aufgabe 17: Zwei–Nukleonen–System [10]

Ein System aus zwei Nukleonen mit Spin $\frac{1}{2}$ wird durch die Wechselwirkung

$$V(\vec{r}) = V_1(r) + \frac{1}{\hbar^2} V_2(r)\, \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \frac{1}{\hbar^2} V_3(r)\, \vec{L} \cdot \vec{S}$$

beschrieben. Welche Quantenzahlen charakterisieren das System (warum?) und wie muss die Wellenfunktion des Systems zusammengefügt werden? Der Bahndrehimpuls ℓ wird zu den ‘guten’ Quantenzahlen gehören, da das System rotationssymmetrisch ist. Welche Werte können die weiteren Quantenzahlen für $\ell = 0$ und $\ell = 1$ unter Berücksichtigung des Pauli–Prinzips annehmen? Was können Sie dann über das Spektrum aussagen?

Hinweis: Das Pauli–Prinzip kommt allgemein erst später dran und besagt, dass die Gesamtwellenfunktion von Fermionen antisymmetrisch unter Austausch zweier Teilchen ist. Erinnern Sie sich auch daran, dass Sie die Symmetrie der Bahndrehimpulseigenfunktionen aus der Parität der Kugelflächenfunktionen $Y^\ell_m(\vec{n})$ ablesen können.

Aufgabe 18: Clebsch–Gordan Koeffizienten **[15]**

Ein System sei aus zwei Spin–1 Systemen zusammengesetzt. Wie lauten die Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses, $|\, jm\,\rangle$, ausgedrückt als Linearkombinationen der gekoppelten $|\,1m_1\,\rangle\,|\,1m_2\,\rangle$–Zustände? Mit anderen Worten: bestimmen Sie die Clebsch–Gordan Koeffizienten für $1 \otimes 1 = 0 \oplus 1 \oplus 2$. Beachten Sie die Condon–Shortley Konvention. Sie können die Koeffizienten für $|\, j - m\,\rangle$ aus denen für $|\, jm\,\rangle$ durch bekannte Symmetrien bestimmen. Als letzten Zustand werden Sie vermutlich $|\,00\,\rangle$ berechnen. J_- auf diesen angewandt sollte 0 ergeben. Überprüfen Sie das. (Bei der Gelegenheit lohnt es sich herauszufinden, was Alfred Clebsch mit dem Polytechnikum Karlsruhe zu tun hatte.)

$\overline{\Sigma_{\textbf{Blatt5}} = \mathbf{40}}$