Theoretische Physik E — Quantenmechanik II

V: Prof. Dr. D. Zeppenfeld, Ü: PD Dr. S. Gieseke

Übungsblatt 6

Abgabe: Fr, 10.01.'20, 11:30 Uhr, Besprechung: Di, 14.01.'20

Aufgabe 19: Wigner–Matrizen **[15]**

Die Wigner–Matrizen $d^{(j)}_{m'm}(\beta)$ lassen sich für beliebiges j sukzessiv aus den $d^{(\frac{1}{2})}_{m'm}(\beta)$ und den Clebsch–Gordan–Koeffizienten (CGKs) berechnen. Bestimmen Sie so die gesamte Wigner Matrix für $j = 1$ aus der Matrix für $j = 1/2$,

$$d^{\frac{1}{2}}_{m'm}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\beta}{2} & -\sin\frac{\beta}{2} \\ \sin\frac{\beta}{2} & \cos\frac{\beta}{2} \end{pmatrix}$$

und den dazugehörigen CGKs.

Aufgabe 20: Drehimpuls als Tensoroperator **[$3 + 6 + 6 = 15$]**

Wir betrachten den Drehimpulsoperator J_q mit den Komponenten

$$J_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(J_x \pm iJ_y) = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}J_\pm\,, \qquad J_0 = J_z\,.$$

(a) Zeigen Sie, dass die J_q sphärische Tensoroperatoren vom Rang 1 sind ($T^{(1)}_q$).

(b) Berechnen Sie die reduzierten Matrixelemente $\langle\,\alpha' j' \,||\, J_q \,||\, \alpha j\,\rangle$.
Hinweis: $\langle\, j1; m_1 = j, m_2 = 0 \,|\, j1; j, m = j\,\rangle = \sqrt{j/(j+1)}$.

(c) Berechnen Sie $J'_q = d^{(1)}_{qp} J_p$ mit Hilfe der Wigner–Matrix aus Aufgabe 16. Zeigen Sie, dass Ihr Ergebnis mit der Erwartung für eine Drehung der Komponenten J_x, J_y, J_z um den Winkel β um die y–Achse übereinstimmt.

Aufgabe 21: Sphärische Tensoren und Kugelflächenfunktionen **[$4 + 6 = 10$]**

(a) Schreiben sie xy, xz und $(x^2 - y^2)$ als Komponenten eines irreduziblen sphärischen Tensoroperators vom Rang 2. *Hinweis:* die Kugelflächenfunktionen Y^m_ℓ sind irreduzible sphärische Tensoroperatoren vom Rang ℓ. Schreiben Sie die in Frage kommenden Y^m_ℓ in kartesischen Koordinaten.

(b) Das Quadrupolmoment lässt sich als der Erwartungswert

$$Q = e\big\langle\, \alpha, j, m = j \,\big|\, 3z^2 - r^2 \,\big|\, \alpha, j, m = j\,\big\rangle$$

schreiben. Drücken Sie das Matrixelement

$$M = e\big\langle\, \alpha, j, m' \,\big|\, x^2 - y^2 \,\big|\, \alpha, j, m = j\,\big\rangle$$

(mit $m' = j, j-1, \ldots$) durch Q und geeignete Clebsch–Gordan Koeffizienten aus.