

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik II)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald

WS 20/21 – Blatt 01

Abgabe: 09.11.2020, 11:00 Uhr

(ausnahmsweise montags)

Besprechung: 10.11.2020

Aufgabe 1*: Anharmonische Oszillatoren (5 Punkte)

Wir betrachten einen Oszillator mit dem Hamiltonoperator $H = H_0 + \lambda W$ mit

$$H_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2,$$

und

(i) $W = \hbar\omega\hat{x}$,

(ii) $W = \hbar\omega\hat{x}^2$,

(iii) $W = \hbar\omega\hat{x}^3$.

Hierbei sei $\hat{x} = x\sqrt{m\omega/\hbar}$. Bestimmen Sie jeweils die Korrekturen zu den Energieeigenwerten bis zur zweiten Ordnung und die Korrekturen zu den Zuständen bis zur ersten Ordnung in Störungstheorie unter der Annahme $\lambda \ll 1$. In den Fällen (i) und (ii) können Sie die Energieeigenwerte exakt bestimmen, vergleichen Sie diese mit Ihren Lösungen.

Aufgabe 2*: Zweidimensionaler Oszillator (5 Punkte)

Wir betrachten einen zweidimensionalen harmonischen Oszillator

$$H_0 = \frac{p_x^2 + p_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega(x^2 + y^2)$$

mit einer Störung der Form

$$W = Kxy.$$

- (i) Geben Sie die Eigenenergien E_n und Eigenfunktionen $\psi_n(x, y)$ des ungestörten Systems an. Welchen Entartungsgrad haben die Energieeigenwerte?

Tipp: Nutzen Sie aus, dass die x - und y -Komponenten im Hamiltonoperator nicht mischen.

- (ii) Betrachten Sie den ersten angeregten Zustand. Berechnen Sie die Korrekturen zur Energie und zu den Wellenfunktionen in erster Ordnung Störungstheorie.

- (iii) Wiederholen Sie die Berechnung für den zweiten angeregten Zustand.

Aufgabe 3: Endliche Ausdehnung des Atomkerns

Das elektrostatische Potential eines Atomkerns kann durch das Potential einer homogen geladenen Kugel angenähert werden. Dann bewegt sich ein Elektron in einem wasserstoffartigen Atom mit dem Potential

$$V(r) = \begin{cases} -\frac{3Ze^2}{2R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right) & (r \leq R), \\ -\frac{Ze^2}{r} & (r > R). \end{cases}$$

Die Abweichung vom Coloumbpotential kann als kleine Störung des Wasserstoffproblems betrachtet werden. Berechnen Sie die Energieeigenwerte in erster Ordnung Störungstheorie.

Tipp: Die Kernradien $R \approx A^{1/3}r_0$ mit $r_0 = 1 \text{ fm}$ sind viel kleiner als der Bohrsche Radius. Daher können in den auftretenden Integralen die Wellenfunktionen näherungsweise durch ihren Wert an der Stelle $r = 0$ approximiert werden.

Kurzpräsentationen

Für den erfolgreichen Abschluss der Übungen müssen Sie im Rahmen der Tutorien 2-7 eine Kurzpräsentation von 8-10 Minuten Länge halten. Die Präsentationen sollen keine Vorlesung ersetzen, sondern Themen wiederholen, vertiefen und zur Diskussion einladen. Da die Zeit in den Tutorien begrenzt ist, sollten Sie die Präsentation üben, sodass die 8-10 Minuten eingehalten werden. Auf jedem Übungsblatt wird es zwei Themenvorschläge geben, die dann in den Übungen verteilt werden.

Themenvorschläge für Tutorium 2:

- (i) Stellen Sie den harmonischen Oszillator in der Quantenmechanik vor. Sie können Ihre Präsentation wie folgt strukturieren:
 - Führen Sie Auf- und Absteigeoperatoren ein.
 - Zeigen Sie, dass das Spektrum diskret und nach unten begrenzt ist. Berechnen Sie damit die Energieeigenwerte.
 - Berechnen Sie die Wellenfunktion im Grundzustand und zeigen Sie, wie die Wellenfunktionen der angeregten Zustände daraus berechnet werden können.
- (ii) Stellen Sie das Wasserstoffatom in der Quantenmechanik vor. Sie können Ihre Präsentation wie folgt strukturieren:
 - Zeigen Sie, dass Sie die Radial- und Winkelanteile der Schrödingergleichung über einen Faktorisierungsansatz trennen können.
 - Skizzieren Sie die Lösung der entstehenden Differentialgleichungen über einen Potenzreihenansatz.
 - Zeigen Sie, dass das Spektrum diskret ist und diskutieren die Entartung der Energieeigenwerte.