

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald

WS 20/21 – Blatt 02

Abgabe: 20.11.2020, 11:00 Uhr

Besprechung: 24.11.2020

Aufgabe 1*: Clebsch-Gordan-Koeffizienten (5 Punkte)

- (i) Betrachten Sie die Addition zweier Drehimpulse $j_1 = 1/2$ und $j_2 = 3/2$. Berechnen Sie die Clebsch-Gordan-Koeffizienten, die den Entwicklungskoeffizienten des Basiswechsels vom Tensorprodukt Raum $|j_1, m_1\rangle \otimes |j_2, m_2\rangle = |j_1, j_2; m_1, m_2\rangle$ in den Raum der Eigenzustände des Gesamtdrehimpulses $|J, M\rangle$ entsprechen. Verwenden Sie dazu die Phasenkonvention $\langle j_1, j_2; j_1, J - j_1 | J, J \rangle > 0$.
- (ii) Leiten Sie für beliebige Drehimpulse j_1 und j_2 folgende Rekursionsformeln her:

$$\begin{aligned} a(J, M) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle &= a(j_1, m_1) \langle j_1, m_1; m_1 + 1, m_2 | J, M + 1 \rangle \\ &\quad + a(j_2, m_2) \langle j_1, m_1; m_1, m_2 + 1 | J, M + 1 \rangle, \\ a(J, M - 1) \langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J, M \rangle &= a(j_1, m_1 - 1) \langle j_1, m_1; m_1 - 1, m_2 | J, M - 1 \rangle \\ &\quad + a(j_2, m_2 - 1) \langle j_1, m_1; m_1, m_2 - 1 | J, M - 1 \rangle, \end{aligned}$$

mit $a(p, q) = \sqrt{p(p+1) - q(q+1)}$. Ausgehend von $\langle j_1, j_2; j_1, j_2 | J, J \rangle = 1$ können Sie damit alle anderen Clebsch-Gordan-Koeffizienten berechnen. Kontrollieren Sie damit Ihre Ergebnisse aus dem vorherigen Aufgabenteil.

Tipp: Fangen Sie mit dem Matrixelement

$$\langle j_1, j_2; m_1, m_2 | J_{\pm} | J, M \rangle \quad \text{mit} \quad J_{\pm} = J_{1,\pm} + J_{2,\pm}$$

an und wenden Sie den Operator $J_{\pm}$ einmal nach links und einmal nach rechts an.

Aufgabe 2*: Vektoroperatoren (5 Punkte)

Betrachten Sie ein spinloses Teilchen mit Bahndrehimpuls $\vec{L}$ und einen Operator $\vec{A}$ dessen Komponenten folgenden Vertauschungsrelationen genügen

$$[L_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} A_k$$

wobei ϵ_{ijk} den Levi-Civita-Tensor bezeichnet.

- (i) Benutzen Sie das (allgemeine) Wigner-Eckart-Theorem, um die Matrixelemente $\langle l, m | A_q^{(1)} | l', m' \rangle$ mit $q = -1, 0, 1$ zu berechnen. Hierbei bezeichnet $|l, m\rangle$ die Standardbasis von gemeinsamen Eigenzuständen von $\vec{L}^2$ und L_z und die Komponenten $A_q^{(1)}$ lauten

$$A_{-1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x - iA_y), \quad A_0^{(1)} = A_z, \quad A_1^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (A_x + iA_y).$$

Leiten Sie die Auswahlregeln, die der Operator in der $|l, m\rangle$ -Basis erfüllt, her.

- (ii) Betrachten Sie nun den Fall $\vec{A} = \vec{L}$. Berechnen Sie explizit die dazugehörigen reduzierten Matrixelemente $\langle l || L^{(1)} || l' \rangle$.

Aufgabe 3: Matrixdarstellung des Spinoperators $\vec{S}^2$

Betrachten Sie ein System aus zwei Spin-1/2-Teilchen. Der Zustandsraum eines solchen Systems ergibt sich aus dem Produktraum der einzelnen Spinräume. Eine Orthonormalbasis dieses Raumes lautet

$$|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle = \{|+, +\rangle, |+, -\rangle, |-, +\rangle, |-, -\rangle\}$$

wobei die Vektoren $|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$ die Eigenvektoren der vier Observablen $\vec{S}_1^2, S_{1,z}, \vec{S}_2^2$ und $S_{2,z}$ bezeichnen. Betrachten Sie nun den Gesamtdrehimpuls des Systems $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$.

- (i) Zeigen Sie, dass die Operatoren $\vec{S}_1^2, \vec{S}_2^2, \vec{S}^2$ und S_z paarweise vertauschen.
- (ii) Berechnen Sie die Matrixdarstellung von $\vec{S}^2$ in der Basis $|\epsilon_1, \epsilon_2\rangle$.
- (iii) Finden Sie eine Basis in der $\vec{S}^2$ diagonal ist und geben Sie die Eigenzustände und ihre Entartung an.

Aufgabe 4: Reduzible Tensoren

Seien $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Vektoren, die sich unter Drehung R folgendermaßen transformieren

$$v'_i = R_{ik} v_k, \quad w'_i = R_{ik} w_k,$$

wobei wir Einsteinsche Summenkonvention benutzen.

- (i) Zeigen Sie, dass die Matrix $T_{ij} = v_i w_j$ geschrieben werden kann als

$$T_{ij} = \frac{1}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij} + \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji}) + \frac{1}{2} \left(T_{ij} + T_{ji} - \frac{2}{3} \text{Tr}(T) \delta_{ij} \right), \quad (1)$$

wobei $\text{Tr}(M)$ die Spur einer Matrix M bezeichnet.

- (ii) Zeigen Sie, dass die drei Anteile auf der rechten Seite von Gl. (1) separat invariant unter Drehungen sind.

Kurzpräsentationen: Themenvorschläge für Tutorium 2

- Leiten Sie die Zustandskorrekturen in 2ter Ordnung Störungstheorie für den allgemeinen, nicht-entarteten Fall her. Verwenden Sie dafür die Notation aus der Vorlesung und erweitern Sie den dort eingeführten Formalismus, um $|n\rangle_2$ durch Matrixelemente der Störung W mit ungestörten Zuständen $|n\rangle_0$ auszudrücken.
- Wiederholen Sie kurz einige Elemente der speziellen Relativitätstheorie. Orientieren Sie sich dabei an folgenden Fragen:
 - Was ist eine Lorentz-Transformation?
 - Welche Größe ist invariant unter diesen Transformationen?
 - Was versteht man unter den Begriffen Zeitdilatation und Längenkontraktion?