

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald

WS 20/21 – Blatt 03

Abgabe: 4.12.2020, 11:00 Uhr

Besprechung: 8.12.2020

Aufgabe 1*: Elektron im harmonischem Potential (6 Punkte)

Wir betrachten ein Elektron im Potential eines isotropen harmonischen Oszillators. Unter Vernachlässigung des Spins ergibt sich der Hamilton-Operator

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\vec{r}^2.$$

Ein solches System lässt sich als Produkt dreier harmonischer Oszillatoren mit gleicher Frequenz beschreiben. Die Leiteroperatoren seien mit a_x, a_y, a_z bezeichnet. Der Übergang zu Kugelkoordinaten lässt sich nun in der Operatorsprache vollziehen. Definiere dazu

$$a_\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x + ia_y), \quad a_\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_x - ia_y),$$

sowie die zugehörigen Operatoren $N_\theta = a_\theta^\dagger a_\theta, N_\phi = a_\phi^\dagger a_\phi, N_z = a_z^\dagger a_z$.

- (i) (1P) Wie lauten die Vektoren $\vec{r}$, $\vec{p}$ und $\vec{L}$ in der neuen Basis? Zeigen Sie explizit, dass die Komponenten von $\vec{L}$ eine Drehimpulsalgebra bilden und dass

$$|n_\phi, n_\theta, n_z\rangle := (n_\phi! n_\theta! n_z!)^{-1/2} (a_\phi^\dagger)^{n_\phi} (a_\theta^\dagger)^{n_\theta} (a_z^\dagger)^{n_z} |0, 0, 0\rangle$$

Eigenzustände zu H und L_z sind. Wie lauten die dazugehörigen Eigenwerte?

- (ii) (1P) Wie kann aus den bekannten Eigenzuständen zu H und L_z gemeinsame Eigenzustände zu $\vec{L}^2$ und L_z konstruiert werden? Beschreiben Sie ein Verfahren, das mit dem Zustand $|n_\phi, 0, 0\rangle$ startet und sukzessive Eigenzustände konstruiert, die mit Hilfe von $n = n_\phi + n_\theta + n_z, l, m_l$ klassifiziert werden können. Eine explizite Berechnung der Zustände ist nicht nötig.

Tipp: Orientieren Sie sich am Algorithmus zur Berechnung von Clebsch-Gordan-Koeffizienten aus der Vorlesung.

Die Aufgaben (iii)-(iv) können unabhängig von (i)-(ii) gelöst werden. Setzen Sie dafür im Folgenden die Kenntnis einer gemeinsamen Eigenbasis von $\vec{L}^2$ und L_z voraus.

- (iii) (1,5P) Berechnen Sie die führende Energie-Korrektur des Darwin-Term. Ist diese „klein“? Kann durch diese Korrektur die Entartung der Energieniveaus verringert werden?
- (iv) (1,5P) Betrachten wir nun auch den Spin des Elektrons. Geben Sie den Hamiltonoperator an, der die Spin-Bahn-Kopplung beschreibt und bestimmen Sie die führende Energiekorrektur.

Tipp: Zur Herleitung des Darwin Terms und der Spin-Bahn-Kopplung können Sie analog zum Coulomb-Potential in der Vorlesung vorgehen.

- (v) (1P) Welche zusätzlichen Wechselwirkungen ergeben sich in einem externen Magnetfeld? Geben Sie die Beiträge dieser Wechselwirkungen zum Hamiltonoperator an. Wie müssten Sie vorgehen, um die Energiekorrektur in erster Ordnung Störungstheorie zu berechnen? Eine explizite Rechnung ist nicht notwendig.

Aufgabe 2*: Spin-Bahn-Kopplung (4 Punkte)

Den Hamilton-Operator eines Spin-3/2-Teilchens in einem Zentralpotential $V(r)$ ist unter der Berücksichtigung der Spin-Bahn-Kopplung als

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + X(r)\vec{L} \cdot \vec{S}$$

gegeben.

- (i) (2P) Nehmen Sie an, die Spin-Bahn-Kopplung ist eine kleine Störung. Berechnen Sie die Energiekorrekturen erster Ordnung. In wieviele Niveaus spalten die Zustände zu $l = 0, 1, 2$ auf?
- (ii) (2P) Skizzieren Sie die Energieniveaus und berechnen Sie die relative Energieaufspaltung zu festem l .

Aufgabe 3: Positronium

Positronium ist ein Atom, das aus einem Elektron e^- und seinem Antiteilchen, dem Positron e^+ besteht. Betrachten Sie ein solches Atom im Grundzustand, welches sich in einem Magnetfeld $\vec{B}$ parallel zur z-Achse befindet. Der Hamilton-Operator kann folgendermaßen geschrieben werden:

$$\begin{aligned} H &= H_0 + H_{HF} + H_Z, \\ H_{HF} &= A\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2, \\ H_Z &= -\vec{\mu}_1 \cdot \vec{B} - \vec{\mu}_2 \cdot \vec{B}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet H_0 den Hamilton-Operator des Positroniums, der nur die elektrostatische Wechselwirkung zwischen Elektron und Positron enthält. $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ sind die Spinoperatoren von Elektron bzw. Positron und $\vec{\mu}_1$ und $\vec{\mu}_2$ deren magnetische Momente. $\vec{S}_i$ und $\vec{\mu}_i$ sind durch die gyromagnetischen Verhältnisse γ_1 und γ_2 miteinander verknüpft:

$$\vec{\mu}_i = \gamma_i \vec{S}_i, \quad i = 1, 2.$$

Für das Elektron und das Positron gilt $\gamma_1 = -\gamma_2$. H_{HF} beschreibt die magnetische Wechselwirkung zwischen $\vec{S}_1$ und $\vec{S}_2$ und H_Z die Kopplung von $\vec{B}$ an die magnetischen Momente.

- (i) Berechnen Sie die Matrixelemente des Störoperators $H_{HF} + H_Z$ in der Basis $\{|F, m_F\rangle\}$, wobei F und m_F die Quantenzahlen des Gesamtspins

$$\vec{F} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2,$$

sind.

- (ii) Bestimmen Sie die Aufspaltung des $1S$ -Grundzustands in erster Ordnung Störungstheorie.
- (iii) Stellen Sie graphisch die Energieaufspaltung als Funktion des Magnetfelds B dar.

Aufgabe 4:

Der Radialanteil der Wellenfunktion des Wasserstoffatoms $\Psi_{nlm}(\vec{r}) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta, \phi)$ ist gegeben durch:

$$R_{nl}(r) = -\left(\frac{2}{a_0}\right)^{3/2} \frac{1}{n^2} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2[(n+l)!]^3}} F_{nl}\left(\frac{2r}{na_0}\right), \quad \text{mit} \quad F_{nl}(\rho) = \rho^l e^{-\rho/2} L_{n+l}^{2l+1}(\rho).$$

$a_0 = \frac{\hbar}{\alpha m c} = 0.529 \times 10^{-10} \text{ m}$ ist der Bohrsche Radius. Dabei lauten für $p, k \in \mathbb{N}$ die Laguerre-Polynome

$$L_p^k(\rho) = \frac{d^k}{d\rho^k} \left[e^\rho \frac{d^p}{d\rho^p} (\rho^p e^{-\rho}) \right]$$

und erfüllen die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{(p-k)!}{(p!)^3} \int_0^\infty d\rho \rho^k e^{-\rho} L_p^k(\rho) L_q^k(\rho) = \delta_{pq}.$$

Berechnen Sie die Erwartungswerte der Operatoren (i) $1/r$, (ii) $1/r^2$ und (iii) $1/r^3$ für die gebundenen Energieeigenzustände. Benutzen Sie das Ergebnis aus (i) um mit Hilfe des Virial-Theorems die mittlere Geschwindigkeit eines Elektrons im Wasserstoffatom zu berechnen.

Kurzpräsentationen: Themenvorschläge für Tutorium 3

- Wiederholen Sie Aspekte der nicht-relativistischen Streutheorie. Nehmen Sie dabei an, dass die Energie des gestreuten Teilchens groß gegenüber dem Potential ist. Leiten Sie einen analytischen Ausdruck für die Streuamplitude in der Bornschen Näherung her.
 - Diskutieren Sie im Rahmen der nicht-relativistischen Streutheorie die Partialwellenentwicklung. Orientieren Sie sich dabei an folgenden Fragen:
 - Welchen Ansatz macht die Partialwellenentwicklung?
 - Was versteht man unter einer Streuphase?
 - Welche Voraussetzungen müssen erfüllt sein, damit die auftretenden unendlichen Reihen durch endliche Summen ersetzt werden können? Leiten Sie für gegebene Teilchenenergie und Potentialstärke eine Abschätzung für die Anzahl der Terme her.
-