

Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald

WS 20/21 – Blatt 04

Abgabe: 18.12.2020, 11:00 Uhr

Besprechung: 22.12.2020

Aufgabe 1*: Wasserstoffatom im elektrischen Feld: Stark-Effekt (4 Punkte)

Betrachten Sie das Wasserstoffatom in einem konstanten elektrischen Feld $\vec{E}$, das in z -Richtung zeigt. Der Hamilton-Operator lautet somit $H = H_0 + H_1$ mit

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{\vec{p}^2}{2m} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r}, \\H_1 &= -eEz,\end{aligned}$$

wobei $\vec{E} = E\vec{e}_z$. Das Wasserstoffatom soll sich im Grundzustand befinden.

- (i) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass in erster Ordnung Störungstheorie die Korrektur zu E_1 verschwindet: $E_1^{(1)} = 0$.
- (ii) Zur zweiten Ordnung in der Störungstheorie ist die Korrektur zu E_1 gegeben durch

$$E_1^{(2)} = e^2 E^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{|\langle n, l, m | z | 1, 0, 0 \rangle|^2}{E_1 - E_n}.$$

Berechnen Sie den Beitrag der Reihe für $n = 2$.

Bemerkung: Dieser Beitrag macht 80% der gesamten Korrektur aufgrund von Bindungszuständen aus.

Zusatzaufgabe: Berechnen Sie auch den Beitrag für $n = 3$. Wie genau können Sie nun den Gesamtbeitrag approximieren?

Aufgabe 2*: Klein-Gordon-Gleichung für Teilchen im elektromagnetischen Feld (6 Punkte)

- (i) Leiten Sie die Klein-Gordon-Gleichung für ein geladenes, relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld her.
Tipp: Führen Sie das Vektorpotential mit Hilfe der minimalen Substitution ein.
- (ii) Zeigen Sie, dass Ψ^* , wobei Ψ eine Lösung der Klein-Gordon-Gleichung aus dem Aufgabenteil (i) ist, ein Teilchen mit entgegengesetzter Ladung beschreibt.
- (iii) Betrachten Sie nun die Klein-Gordon-Gleichung für ein Elektron in einem Coulomb-Potential $e\Phi(r) = -Z\alpha\hbar c/r$, wobei $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$ die Feinstrukturkonstante bezeichnet. Zeigen Sie mit Hilfe des Separationsansatzes $\Psi(\vec{r}, t) = u(\vec{r})e^{-iEt/\hbar}$, dass die Klein-Gordon-Gleichung auf folgende Differentialgleichung zurückgeführt werden kann

$$(-\hbar^2 c^2 \Delta + m^2 c^4)u(\vec{r}) = [E - e\Phi(r)]^2 u(\vec{r}).$$

- (iv) Vergleichen Sie das Eigenwertproblem in (iii) mit dem des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms und zeigen Sie, dass die Energieeigenwerte für die gebundenen Zustände durch

$$E_{n,l} = \frac{mc^2}{\left(1 + \frac{(Z\alpha)^2}{(n-l-1/2 + [(l+1/2)^2 - (Z\alpha)^2]^{1/2})^2}\right)^{1/2}}.$$

bestimmt sind. Dabei sind n und l die Quantenzahlen des nicht-relativistischen Wasserstoffatoms.

- (v) Entwickeln Sie $E_{n,l}$ bis zur vierten Potenz von $Z\alpha$.

Aufgabe 3: Lorentz-Transformation des Levi-Civita-Tensors

- (i) Zeigen Sie, dass der Levi-Civita-Tensor ein Pseudotensor vierter Stufe unter Lorentz-Transformation ist, d.h. dass gilt

$$\varepsilon'^{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv \det(\Lambda) \Lambda^\alpha_{\alpha'} \Lambda^\beta_{\beta'} \Lambda^\gamma_{\gamma'} \Lambda^\delta_{\delta'} \varepsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'} = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}.$$

Tipp: Zeigen Sie, dass der Ausdruck in der Mitte die Definition des Levi-Civita-Tensors erfüllt.

- (ii) Zeigen Sie nun, dass $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} a_\alpha b_\beta c_\gamma d_\delta$, wobei $a_\alpha, b_\beta, c_\gamma, d_\delta$ Vierervektoren sind, ein Pseudoskalar unter Lorentz-Transformationen ist.

Aufgabe 4: $Z \rightarrow \tau^+ \tau^-$

Ein ruhendes Z -Boson der Masse $M_Z = 91.1887 \text{ GeV}/c^2$ zerfällt in ein $\tau^+ \tau^-$ -Paar, wobei die Masse des τ -Leptons durch $m_{\tau^\pm} = 1.7771 \text{ GeV}/c^2$ gegeben ist.

- (i) Berechnen Sie die Energie und den Impuls der Zerfallsprodukte (in GeV bzw. GeV/c).
(ii) Die mittlere Lebensdauer ruhender τ -Leptonen beträgt $2.956 \cdot 10^{-13} \text{ s}$. Wie weit kommen die τ -Leptonen im Mittel?

Aufgabe 5: Relativistisches Teilchen im elektromagnetischen Feld

Betrachten Sie ein relativistisches, geladenes Teilchen im elektromagnetischen Feld.

- (i) Berechnen Sie die Bewegungsgleichungen aus der Lagrangefunktion

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \beta^2} - q\Phi(\vec{r}, t) + q\vec{v} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t), \quad \beta^2 = \vec{v}^2/c^2.$$

$\vec{A}$ ist das Vektorpotential und Φ ist das skalare Potential.

- (ii) Leiten Sie die relativistische Hamiltonfunktion aus der Lagrangefunktion von der Teilaufgabe (i), her.
(iii) Zeigen Sie, dass die kovariante Formulierung der Lorentz-Kraft

$$K^\mu = qF^{\mu\nu} \frac{p_\nu}{m}, \quad \text{wobei} \quad K^0 = \frac{1}{c} \frac{\vec{F}_L \cdot \vec{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad K^i = \frac{F_L^i}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

gilt und p_ν der Viererimpuls des Teilchens ist. Die Lorentz-Kraft $\vec{F}_L$ ist, wie in der klassischen Mechanik, gegeben durch $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$, wobei $\vec{E}$ und $\vec{B}$ das elektrische bzw. magnetische Feld bezeichnet.

- (iv) Stellen Sie die kovariante Form der Bewegungsgleichung auf.

Kurzpräsentationen: Themenvorschläge für Tutorium 4

- (i) Wie wird der g -Faktor bzw. $g - 2$ des **Muons** gemessen. Wiederholen Sie die wesentlichen Ideen und geben Sie den aktuell besten Messwert an.
(ii) Wiederholung Atomphysik-Vorlesung: Wie wird der g -Faktor bzw. $g - 2$ des **Elektrons** gemessen. Wiederholen Sie die wesentlichen Ideen und geben Sie den aktuell besten Messwert an.