Moderne Theoretische Physik II (Quantenmechanik 2)

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Prof. Dr. M. Steinhauser, Dr. M. Fael, Dr. K. Schönwald

WS 20/21 – Blatt 05
Abgabe: 15.01.2021, 11:00 Uhr
Besprechung: 19.01.2021

Aufgabe 1: Rechnen mit natürlichen Einheiten

In der Teilchenphysik rechnet man in einem Einheitensystem mit $\hbar = c = 1$. Das bedeutet, dass Geschwindigkeiten in Einheiten der Lichtgeschwindigkeit und Wirkungen in Einheiten des Planckschen Wirkungsquantums dividiert durch 2π angegeben werden.

(i) Welche Beziehungen folgen daraus zwischen den Einheiten Meter, Sekunde und MeV?
Hinweis: $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ und $\hbar = 6{,}582\,119 \cdot 10^{-22}\,\mathrm{MeV\ s}$.

(ii) Welcher Masse in Kilogramm entspricht 1 MeV?
Hinweis: $1\,\mathrm{eV} = 1{,}602\,176 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J}$.

(iii) Drücken Sie die inverse Pionenmasse ($m_\pi = 140$ MeV) in fm($= 10^{-15}$m) aus.

(iv) Das Z-Boson hat eine Breite von 2.50 GeV, siehe auch
`https://pdg.lbl.gov/2020/listings/rpp2020-list-z-boson.pdf`.
Wie lange ist die Lebensdauer des Z-Bosons in Sekunden?

Aufgabe 2: Gamma-Matrizen

(i) Die Gamma-Matrizen genügen der Dirac-Algebra $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\mathbb{1}$. Sie haben in der Dirac-Darstellung folgende Form

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix},$$

wobei σ_i, $i = 1, 2, 3$ die Pauli Matrizen bezeichnen.
Berechnen Sie die Matrizen $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, $\quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, in der Dirac-Darstellung.

(ii) Zeigen Sie, dass gilt

$$[\sigma_{\mu\nu}, \sigma_{\rho\omega}] = -2i(g_{\mu\rho}\sigma_{\nu\omega} - g_{\nu\rho}\sigma_{\mu\omega} - g_{\mu\omega}\sigma_{\nu\rho} + g_{\nu\omega}\sigma_{\mu\rho}).$$

(iii) Zeigen Sie, dass gilt

$$\begin{aligned} \not{A}\not{B} + \not{B}\not{A} &= 2A \cdot B, \quad & \gamma^\nu \not{A} + \not{A}\gamma^\nu &= 2A^\nu, \\ \gamma^\nu \not{A} \gamma_\nu &= -2\not{A}, \quad & \gamma^\nu \not{A}\not{B}\gamma_\nu &= 4A \cdot B, \end{aligned}$$

wobei A und B Vierervektoren sind und die Notation $\not{A} = A_\mu \gamma^\mu$ verwendet wurde.

Hinweis: Für Aufgabenteil (ii) und (iii) soll keine explizite Darstellung der Gamma-Matrizen verwendet werden.

Aufgabe 3*: Dirac-Gleichung: Spin und Bahndrehimpuls (4 Punkte)

Betrachten Sie den Hamilton-Operator der Dirac-Gleichung für ein relativistisches Teilchen mit der Masse m, das sich im Zentralpotential $V(r)$ befindet

$$H \quad = \quad c\vec{\alpha} \cdot \vec{p} + \beta mc^2 + V(r).$$

Berechnen Sie die Kommutatoren $[H,\vec{L}]$, $[H,\vec{S}]$ und $[H,\vec{L}+\vec{S}]$, wobei $\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}$ der Bahndrehimpuls ist und

$$\vec{S} \;=\; \frac{\hbar}{2}\vec{\Sigma}=\frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}\vec{\sigma} & 0\\ 0 & \vec{\sigma}\end{pmatrix}$$

der Spinoperator ist.

Aufgabe 4: Stromerhaltung

Ψ sei eine Lösung der Dirac-Gleichung für ein Teilchen der Masse m und Ladung q in einem äußeren elektromagnetischen Feld

$$[\gamma^\mu(i\partial_\mu - qA_\mu)-m]\Psi = 0\,.$$

(i) Welcher Gleichung genügt $\overline{\Psi}$?

(ii) Zeigen Sie, dass der Dirac-Strom $j^\mu=\overline{\Psi}\gamma^\mu\Psi$ erhalten ist.

(iii) Zeigen Sie, dass die Lösungen der Dirac-Gleichung in Anwesenheit eines elektromagnetischen Feldes folgender Gleichung

$$[(\partial_\mu + iqA_\mu)(\partial^\mu + iqA^\mu)+\frac{1}{2}q\sigma^{\lambda\mu}F_{\lambda\mu}+m^2]\Psi = 0$$

genügt, wobei $F_{\lambda\mu}$ der Feldstärke-Tensor ist.

Hinweis: Überzeugen Sie sich davon, dass $(\gamma^0)^\dagger=\gamma^0$, sowie $(\gamma^k)^\dagger=-\gamma^k$ $(k=1,2,3)$ gilt.

Aufgabe 5*: Dirac-Spinoren und Boosts (6 Punkte)

Gegeben sei die Lorentz-Transformation $\Lambda^\nu{}_\mu$, die einen Boost in j-Richtung $(j=1,2,3)$ mit der Rapidität η beschreibt.

(i) Zeigen Sie, dass die Transformationsmatrix $S(\Lambda)$ der Dirac-Spinoren in folgende Form übergeführt werden kann

$$S(\Lambda)=\cosh\left(\frac{\eta}{2}\right)-i\sigma_{0j}\sinh\left(\frac{\eta}{2}\right)\,.$$

(ii) Berechnen Sie $\{\gamma^\nu,\sigma^{0j}\}$.

(iii) Zeigen Sie, dass gilt $S^{-1}(\Lambda)=\gamma^0S^\dagger(\Lambda)\gamma^0$.

(iv) Zeigen Sie durch explizite Rechnung, dass $S^{-1}(\Lambda)\gamma^\nu S(\Lambda)=\Lambda^\nu{}_\mu\gamma^\mu$ erfüllt ist.
Tipp: Betrachten Sie die Fälle $0\neq\nu\neq j$, $\nu=0$ und $\nu=j$ separat.

Hinweis: Im Aufgabenteil (iii) und (iv) können Sie eine explizite Darstellung der γ-Matrizen verwenden.

Kurzpräsentationen: Themenvorschläge für Tutorium 6

1. Ein (nicht-relativistisches) Teilchen mit der Energie E läuft auf eine Potentialstufe der Höhe $V=$ konstant zu. Diskutieren Sie die Fälle $E>0$ und $E<0$. Geben Sie jeweils die Transmissions- und Reflexionswahrscheinlichkeit an.

2. Leiten Sie die Darstellung eines Lorentz-Boosts in x-Richtung her. Gehen Sie dabei von der Linearität der Transformation aus und fixieren die Darstellung durch die Forderung, dass die Hintereinanderausführung von zwei Lorentz-Boosts wieder ein Lorentz-Boost sein muss.
